

Résistance des matériaux

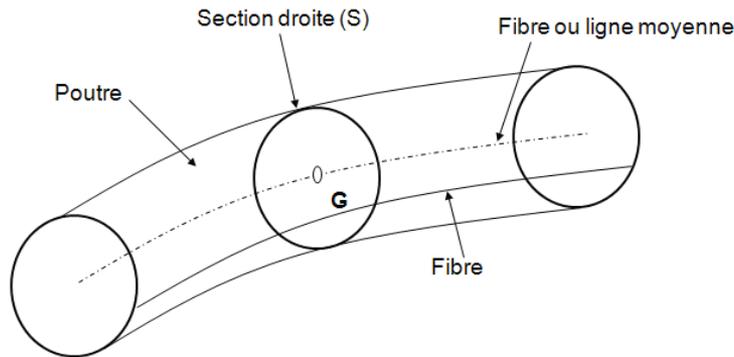
1. Hypothèses de la RDM
2. Efforts de cohésion dans une section droite
3. Contrainte dans une section droite
4. Sollicitations simples: expressions des contraintes
5. Sollicitations composées: expression de la contrainte équivalente de Von Misès.
6. Démarche de dimensionnement

1. Hypothèses de la RDM

1.1. Matériau continu, homogène et isotrope

1.2. Utilisation du modèle « poutre »: $(L / D) > 10$

L: dimension longitudinale
D: dimension transversale

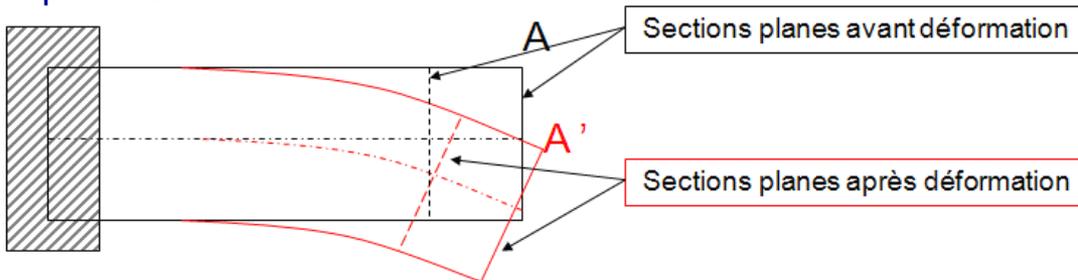


La poutre possède un plan de symétrie.

1.3. Hypothèses sur les déformations

Hypothèse de Navier-Bernoulli

Les sections planes normales aux fibres avant déformation demeurent planes et normales aux fibres après déformation.



Hypothèse de Barré de Saint-Venant.

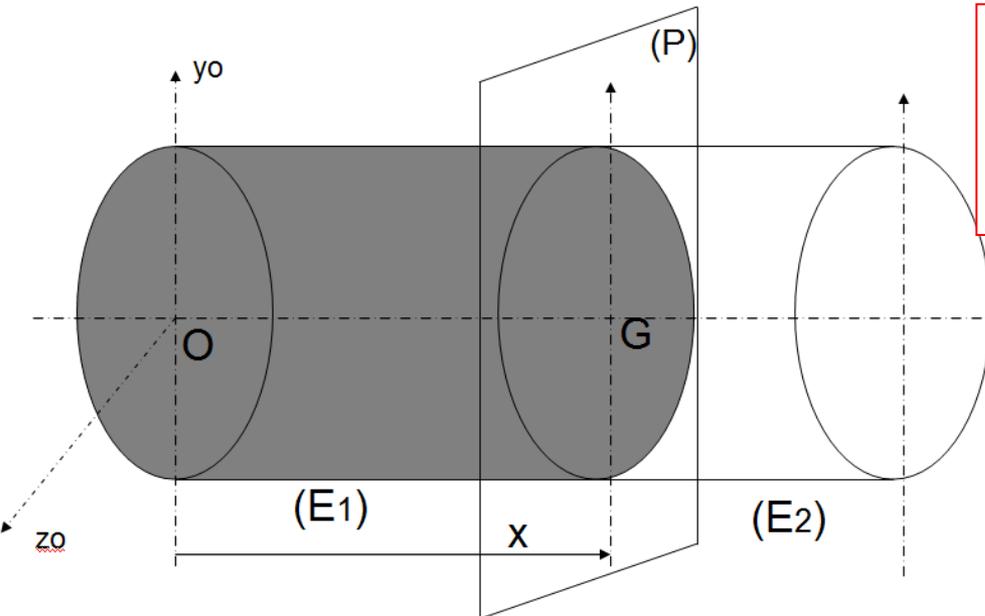
Les résultats obtenus en résistance des matériaux ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des efforts concentrés

2. Efforts de cohésion dans une section droite

Les **actions mécaniques** que le tronçon **(E2)** exercent **sur** le tronçon **(E1)**, à travers la section droite fictive, sont des **efforts intérieurs** à la poutre **(E)**. Ces efforts intérieurs sont appelés **efforts de cohésion**.

On modélise ces efforts par un torseur appelé **torseur de cohésion**.

Le **torseur de cohésion** est le **torseur des efforts de (E2) sur (E1)**.



$$\{ T_{coh} \} = \{ T (E2 \rightarrow E1) \} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{array} \right\}_G$$

$$\vec{R} = N \vec{x} + T_y \vec{y} + T_z \vec{z}$$
$$\vec{M}_G = M_t \vec{x} + M_{fy} \vec{y} + M_{fz} \vec{z}$$

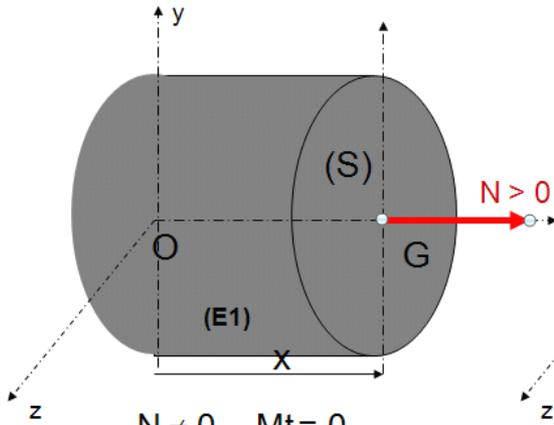
Les éléments de réduction du torseur sont exprimés au point G centre de surface de (S) .

\vec{R} est la résultante des efforts de cohésion.

\vec{M}_G est le moment résultant au point G des efforts de cohésion.

Efforts de cohésion - Sollicitations RDM

Extension simple

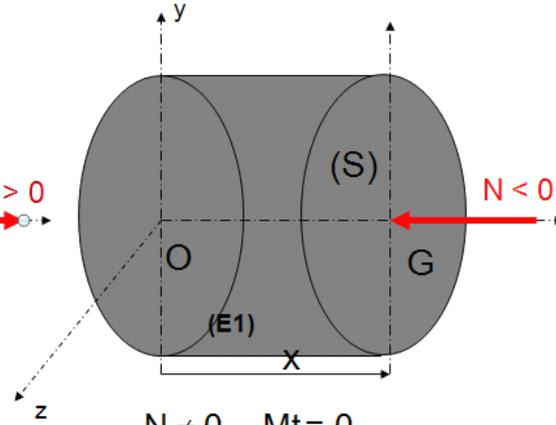


$$N \neq 0 \quad M_t = 0$$

$$T_y = 0 \quad M_{fy} = 0$$

$$T_z = 0 \quad M_{fz} = 0$$

Compression simple

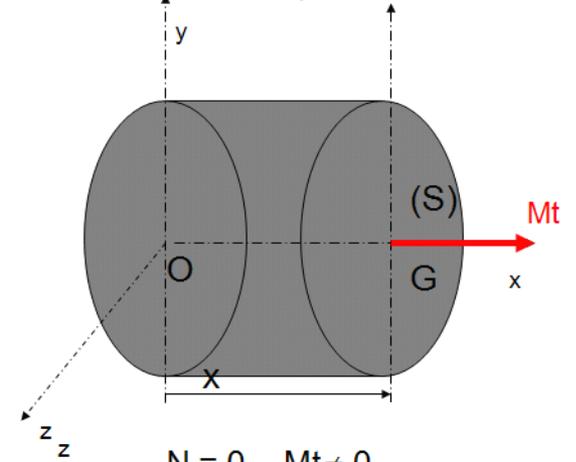


$$N \neq 0 \quad M_t = 0$$

$$T_y = 0 \quad M_{fy} = 0$$

$$T_z = 0 \quad M_{fz} = 0$$

Torsion simple

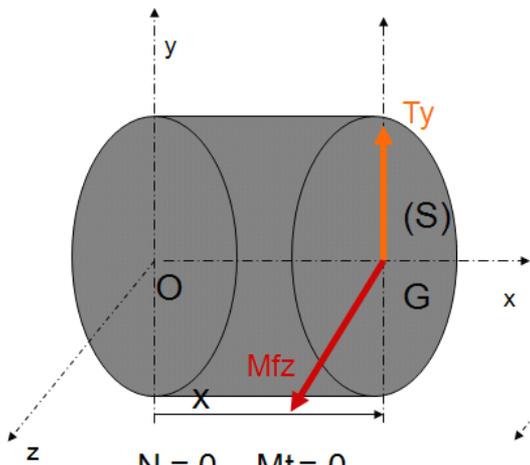


$$N = 0 \quad M_t \neq 0$$

$$T_y = 0 \quad M_{fy} = 0$$

$$T_z = 0 \quad M_{fz} = 0$$

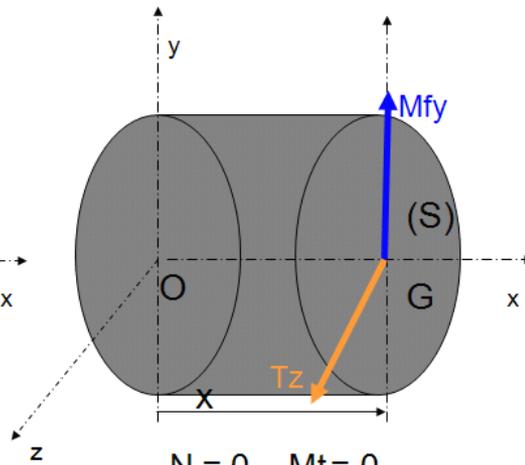
Flexion plane simple



$$N = 0 \quad M_t = 0$$

$$T_y \neq 0 \quad M_{fy} = 0$$

$$T_z = 0 \quad M_{fz} \neq 0$$

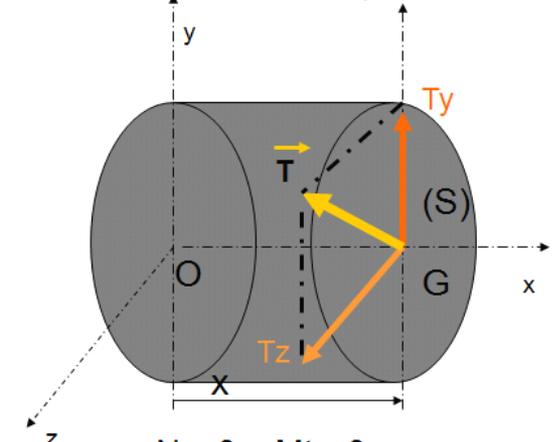


$$N = 0 \quad M_t = 0$$

$$T_y = 0 \quad M_{fy} \neq 0$$

$$T_z \neq 0 \quad M_{fz} = 0$$

Cisaillement simple



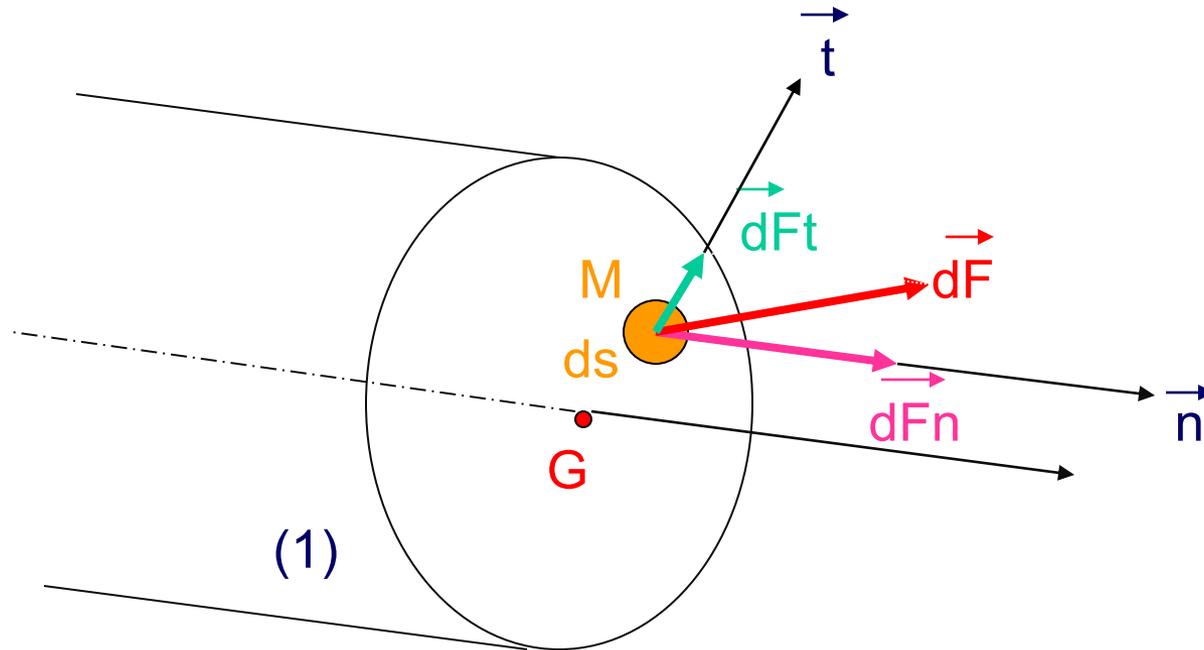
$$N = 0 \quad M_t = 0$$

$$T_y \neq 0 \quad M_{fy} = 0$$

$$T_z \neq 0 \quad M_{fz} = 0$$

3. Contraintes dans une section droite

3.1. Forces de cohésion dans une section droite

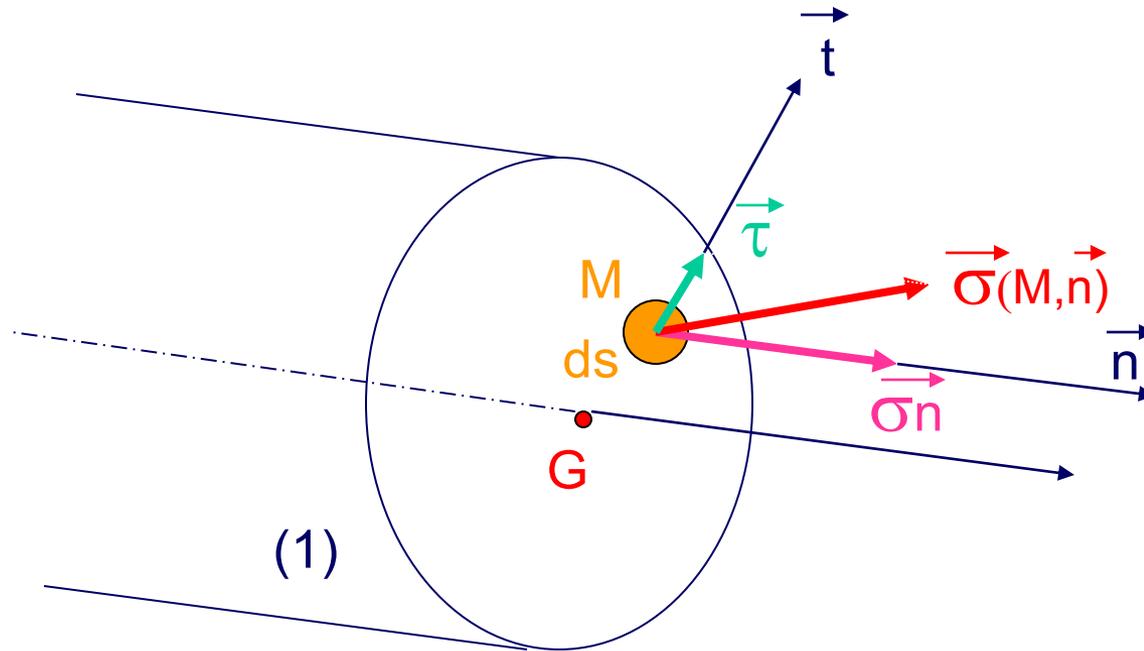


La surface élémentaire ds centrée autour du point M transmet à la partie droite de la poutre un effort élémentaire $\vec{dF}(1 \rightarrow 2)$

On décompose cet effort élémentaire suivant la normale \vec{n} et dans le plan de la section. Repère (M, \vec{n}, \vec{t}) .

$$\vec{dF}(1 \rightarrow 2) = dF_n \vec{n} + dF_t \vec{t}$$

3.2. Contraintes dans une section droite



$$\vec{\sigma}(M, \vec{n}) = \vec{\sigma}_n + \vec{\tau}$$

Unités:
 σ en Pascal (Pa)
 $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$
 $1 \text{ Mpa} = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ N/mm}^2$

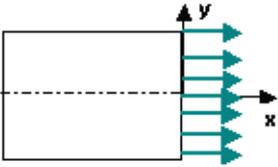
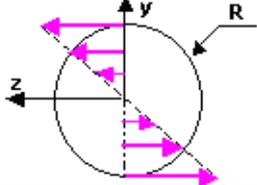
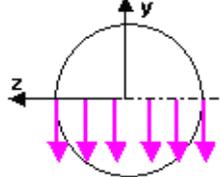
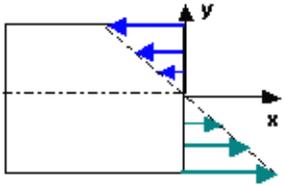
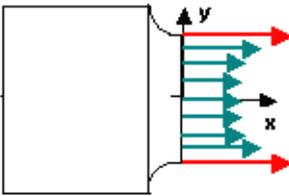
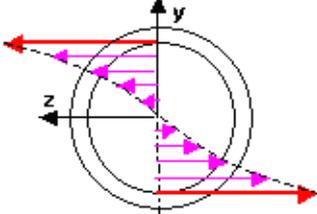
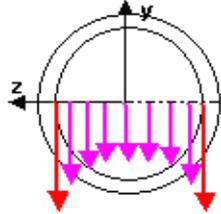
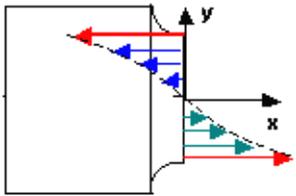
On appelle vecteur contrainte le vecteur $\vec{\sigma}(M, \vec{n}) = \frac{dF(1 \rightarrow 2)}{ds}$ relatif à la surface ds de normale \vec{n} .

On décompose le vecteur contrainte suivant la normale \vec{n} et dans le plan de la section. Repère (M, \vec{n}, \vec{t}) .

On appelle contrainte normale en M la valeur $\sigma_n = \frac{dF_n}{ds}$.

On appelle contrainte tangentielle en M la valeur $\tau = \frac{dF_t}{ds}$.

4. Sollicitations simples

	Extension (traction)-Compression	Torsion (arbres cylindriques)	Cisaillement	Flexion
Effort de cohésion	Effort Normal: N	Moment de torsion: Mt	Effort tranchant: Ty (ou Tz)	Moment de flexion: Mfz (ou Mfy)
Caractéristique de la section	Surface: S	Moment polaire: Io	Surface: S	Moment quadratique: Iz (ou Iy)
Type de contrainte	Normale au plan de la section: σ	Tangentielle au plan de la section: τ	Tangentielle au plan de la section: τ	Normale au plan de la section: σ
Expression de la contrainte	$\sigma_t = \frac{N}{S}$	$\tau = \frac{Mt \cdot r}{I_o}$	$\tau_{moyen} = \frac{T_y}{S}$	$\sigma_f = -\frac{Mfz \cdot y}{Iz}$ ou $\sigma_f = \frac{Mfy \cdot z}{Iy}$
Répartition des contraintes				
Concentration de contraintes				
Condition de résistance	$\sigma_{max} < \frac{Re}{cs}$	$\tau_{max} < \frac{Rg}{cs}$	$\tau_{max} < \frac{Rg}{cs}$	$\sigma_{max} < \frac{Re}{cs}$
Limite élastique utilisée	Limite élastique: Re (ou Rpe)	Limite de glissement: Rg (ou Rpg)	Limite de glissement: Rg (ou Rpg)	Limite élastique: Re (ou Rpe)

Unités usuelles: N, Ty, Tz : **N** (Newton)
 Mt, Mfy, Mfz : **N.mm**
 S : **mm²**
 Io, Iy, Iz : **mm⁴**
 σ, τ, Re, Rg: **Mpa (N/mm²)**

Commentaires: cs: coefficient de sécurité

5. Sollicitations composées

Les sollicitations se superposent.

On utilise principalement le critère de Von Misès pour dimensionner une pièce:

$$\sigma_{VM} < \frac{Re}{cs} \quad \text{avec} \quad \sigma_{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$$

σ_{VM} : contrainte équivalente de Von Misès , Re: limite élastique, cs: coeff.de sécurité

σ : contrainte normale (de traction-compression et /ou de flexion)

τ : contrainte normale (principalement de torsion; les effets dus au cisaillement sont négligeables devant les autres contraintes).

1^{er} cas: Traction (tr)-Flexion (f)

$$\sigma = \sigma_{tr} + \sigma_f$$

2^{ème} cas: Flexion (f) –Torsion (t)

$$\sigma = \sigma_f \quad \text{et} \quad \tau = \tau_t$$

3^{ème} cas: Traction (tr)-Flexion (f)-Torsion (t)

$$\sigma = \sigma_t + \sigma_f \quad \text{et} \quad \tau = \tau_t$$

Soit :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{(\sigma_{tr} + \sigma_f)^2 + 3 \cdot \tau_t^2}$$

6. Démarche de dimensionnement d'une pièce mécanique (sans étude d'industrialisation)

1. Etude statique et /ou dynamique

Isolement d'une pièce

- Graphe des liaisons
- Bilan des efforts extérieurs sur la pièce

Ecriture du PFS ou du PFD

- Bilan équations/inconnues
- Ecriture des équations

Résolution

Ensemble des efforts appliqués sur la pièce

2. Etude de RDM ou calcul par EF

Détermination des efforts de cohésion

- Torseur
- diagrammes
- Section la plus sollicitée

Calcul

- Contrainte maximale
- Déplacements

Validation

- Condition de résistance
- Condition de rigidité

Création du modèle

- Liaisons
- Charges
- Maillage

Calcul

Résultats

- Répartition des contraintes σ_{VM}
- Déplacements

Pièce pré-définie: formes, dimensions, matériau.
Validation définitive après étude d'industrialisation