

# Comportement mécanique des structures fixes ou en équilibre

## Statique du solide

### Objectifs:

- Déterminer les actions mécaniques exercées sur un système isolé en équilibre

## I. Equilibre d'une structure/d'un système

### A. Définition de l'équilibre

Un système matériel (S) isolé est en équilibre par rapport à un repère  $R(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  si, au cours du temps, les coordonnées de chaque point de (S) sont constantes dans le repère  $R(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

Toutes les structures fixes du génie civil (ponts, charpentes,...) et de l'architecture (bâtiments, maisons,...) sont en équilibre par rapport à un repère  $R(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  lié au sol.

Un système comportant une structure fixe et des structures mobiles (mécanisme) est en équilibre si toutes les pièces qui le composent sont immobiles.

### B. Isoler un système

Isoler un système matériel (S) c'est:

- définir une frontière entre le système et son environnement extérieur
- faire le bilan de toutes les actions mécaniques qui lui sont appliquées

Isoler une partie du système matériel (S) c'est:

- définir une frontière entre la partie étudiée du système et son environnement
- faire le bilan de toutes les actions mécaniques qui lui sont appliquées

Le graphe de structure peut être utilisé pour visualiser la frontière d'isolement d'une partie du système.

#### Exemple 1 : pince du Rov Seabotix

Dans le mécanisme de la pince du Rov Seabotix, nous pouvons isoler:

- un doigt afin de vérifier sa résistance lors du serrage d'un objet, ou encore,
- le système pince en entier ce qui permettra d'obtenir des informations sur les actions mécaniques qui existent entre le bras de pince et le châssis du ROV et ainsi de vérifier la résistance de la liaison entre ces deux parties.

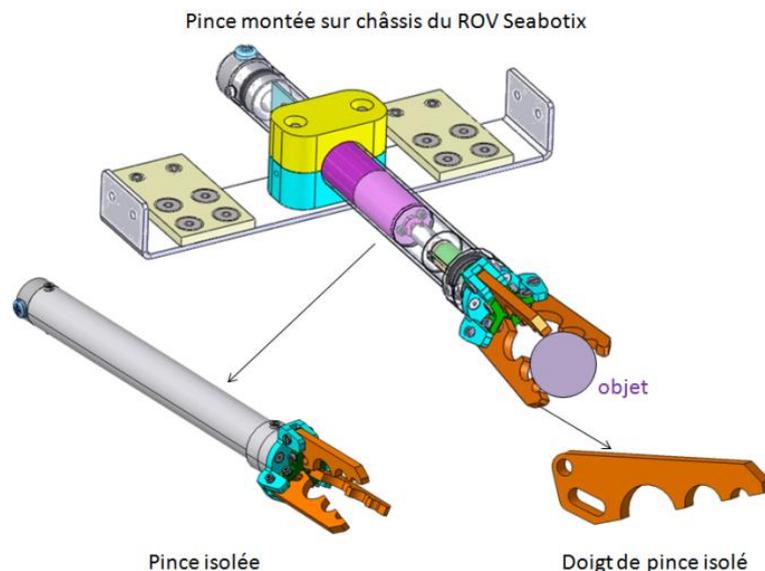


Fig.1 Isolement de différentes parties de la pince

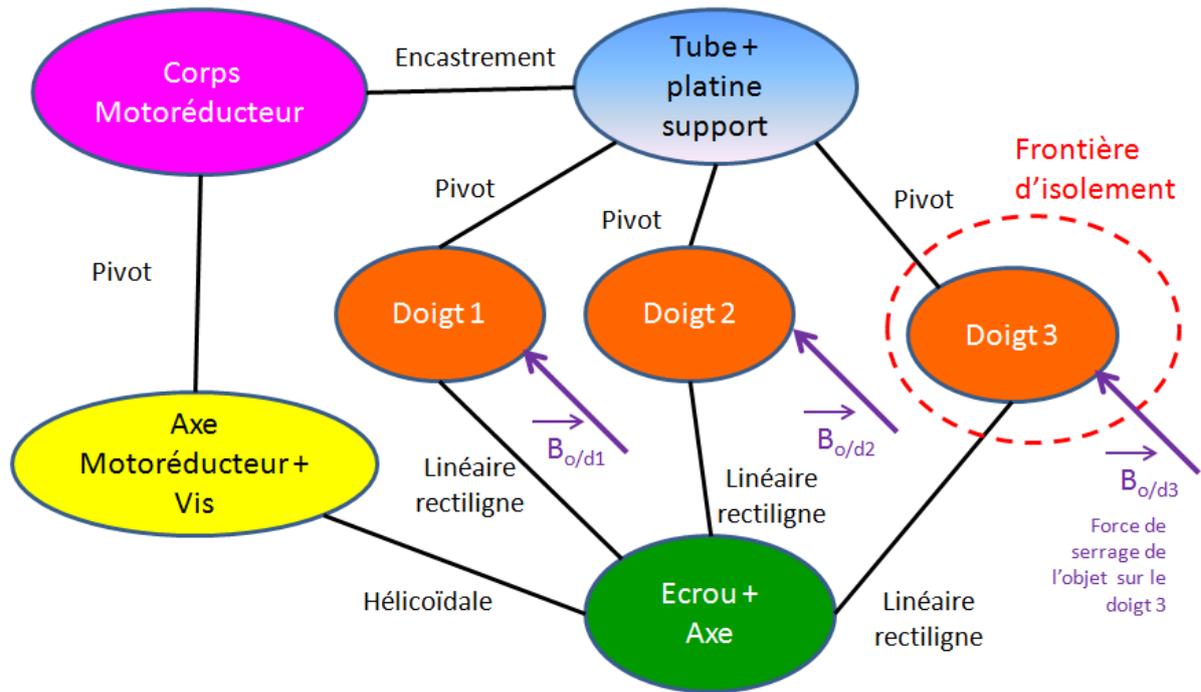


Fig.2 Isolement d'un doigt sur le graphe de structure

**Exemple 2**

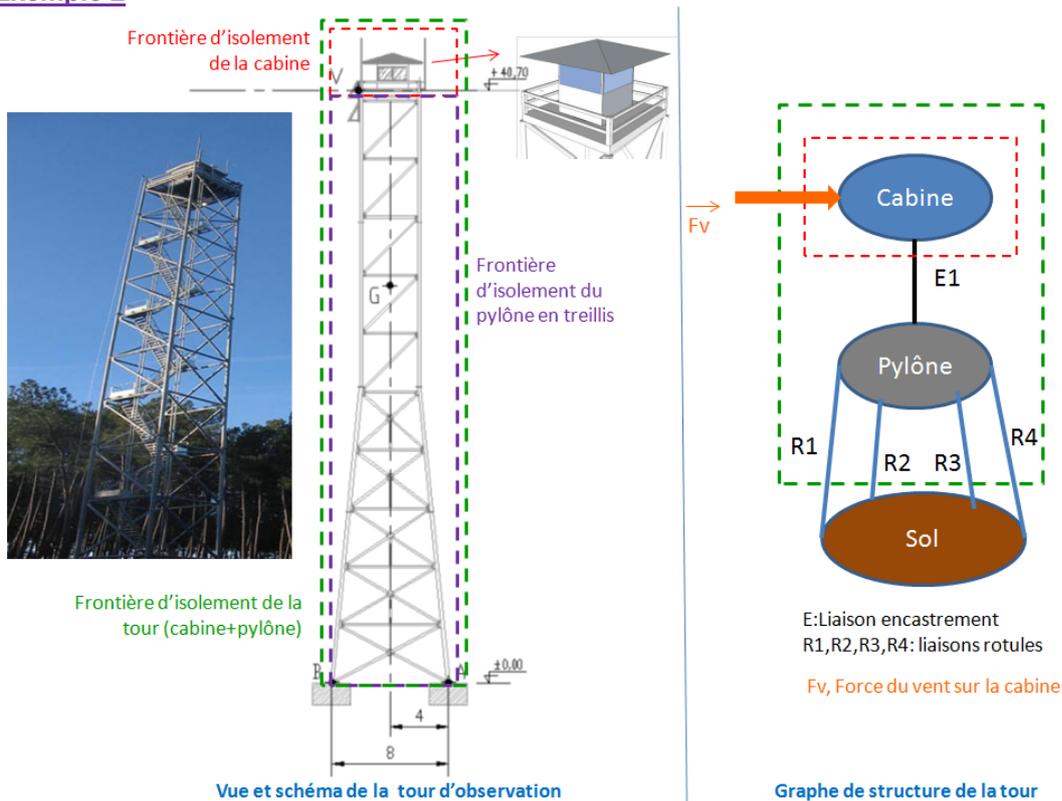


Fig.3 Tour d'observation en forêt

Dans la structure fixe ci-dessus, une tour d'observation en forêt composée d'une cabine fixée sur un pylône métallique, nous pouvons isoler:

- la cabine, afin de définir l'action du vent sur celle-ci et valider sa résistance,
- Le pylône seul afin de valider ses dimensions,
- la tour entière afin de valider sa stabilité par rapport au sol.

### C. Bilan des actions mécaniques

Sur le système isolé, il faut recenser tous les efforts extérieurs appliqués sur le système.

Si la frontière d'isolement coupe une liaison mécanique, l'action mécanique transmissible par la liaison est une action mécanique extérieure exercée sur le système

#### Exemple 3:

##### **Bilan des efforts extérieurs appliqués sur un doigt lors du serrage d'une pièce.**

La pièce est serrée de façon symétrique. Sur chaque doigt est appliquée une force de même intensité.

Sur la figure 2, la frontière d'isolement coupe la liaison pivot entre la platine et le doigt et la liaison linéaire rectiligne entre l'axe et le doigt. On en déduit les actions mécaniques extérieures suivantes:

Action transmissible par la liaison linéaire rectiligne entre l'axe et le doigt :  $\overrightarrow{A_{a/d}}$

Action transmissible par la liaison pivot entre la platine et le doigt :  $\overrightarrow{O_{p/d}}$

Action de serrage de l'objet sur le doigt -Modèle de contact ponctuel:  $\overrightarrow{B_{o/d}}$

### D. Principe fondamental de la Statique

**La Statique est la branche de la Mécanique qui a pour objectif l'étude de l'équilibre des corps.**

#### **Enoncé du Principe Fondamental de la Statique (PFS):**

**Si un système matériel (S) est en équilibre par rapport à un repère  $R(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , la somme des actions mécaniques extérieures appliquées sur (S) est nulle.**

Le PFS se décompose en deux théorèmes:

##### **Théorème de la résultante**

**Si un système matériel (S) est en équilibre par rapport à un repère  $R(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , la somme des forces mécaniques extérieures appliquées sur (S) est nulle.**

$$\sum \overrightarrow{F_{ext/S}} = \vec{0}$$

##### **Théorème du moment résultant**

**Si un système matériel (S) est en équilibre par rapport à un repère  $R(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , la somme des moments, en un point I, des forces mécaniques extérieures appliquées sur (S) est nulle.**

$$\sum \overrightarrow{M_I(\overrightarrow{F_{ext/S}})} = \vec{0}$$

Tous les moments doivent être exprimés en un même point I.

## E. Application du PFS

**1. Cas d'un solide en équilibre soumis à deux forces:** les deux forces sont alors égales et opposées.

### Exemple 4: Tige de vérin hydraulique

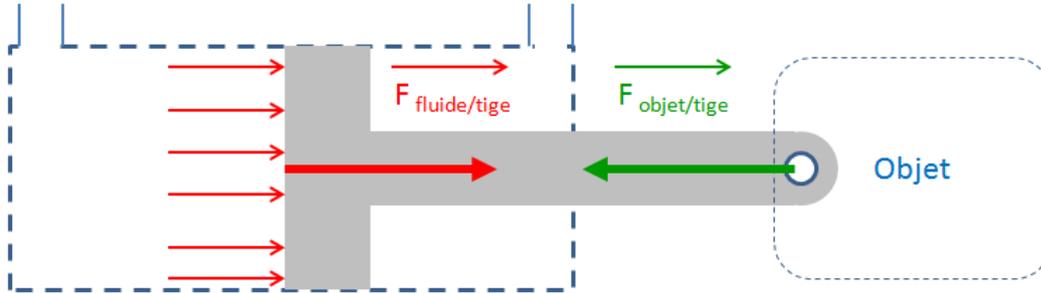


Fig.4 Forces sur tige isolée d'un vérin

La tige d'un vérin hydraulique de poussée est soumise à deux forces : la force de poussée du fluide sur la tige côté piston  $\vec{F}_{\text{fluide/tige}}$  et la force de l'objet à déplacer sur la tige  $\vec{F}_{\text{objet/tige}}$ .

$$\vec{F}_{\text{fluide/tige}} + \vec{F}_{\text{objet/tige}} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \vec{F}_{\text{fluide/tige}} = -\vec{F}_{\text{objet/tige}}$$

**2. Cas d'un solide soumis à trois forces non parallèles:** les trois forces sont concourantes en un même point C.

### Exemple 5: Equilibre statique du doigt de pince lors du serrage d'un objet

Bilan des actions mécaniques extérieures -Modélisation pour résolution par logiciel de statique

Action de serrage de l'objet sur le doigt en B	Action de contact de l'axe sur le doigt (Modèle Liaison ponctuelle au point A)	Action de contact de la platine sur le doigt (Modèle Liaison pivot au point O)
$\vec{B}_{o/d} \begin{pmatrix} 0 \\ B_{o/d} \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>avec <math>\ \vec{B}_{o/d}\ =22 \text{ N}</math>  , sa direction et sa norme sont connues</p>	$\vec{A}_{a/d} \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>tels que <math>\frac{Y_A}{X_A} = \tan 55^\circ</math>  , la direction est connue mais pas sa norme</p>	$\vec{O}_{p/d} \begin{pmatrix} X_O \\ Y_O \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>, sa direction et sa norme sont inconnues</p>
<b>Coordonnées des points dans le repère (O,x,y,z)</b>		
<b>Point B</b>	<b>Point A</b>	<b>Point O</b>
$P \begin{pmatrix} 58 \\ -17.6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en mm}$	$A \begin{pmatrix} 3.8 \\ -13.5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en mm}$	$O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en mm}$

### Résolution graphique

- Tracé des directions qui sont connues: la direction de  $\vec{B}_{o/d}$  passant par B ① puis de  $\vec{A}_{a/d}$  passant par A ② ;
- Obtention de C, point de concours des deux directions précédentes ③;
- Tracé de la direction de  $\vec{O}_{p/d}$  passant par C et O ④;
- Tracé de la somme des trois vecteurs forces en commençant par  $\vec{B}_{o/d}$  car sa norme est connue; puis report des directions de  $\vec{A}_{a/d}$  et de  $\vec{O}_{p/d}$  et tracé des vecteurs force de  $\vec{A}_{a/d}$  et  $\vec{O}_{p/d}$  ⑤; mesure de la norme de chaque vecteur force ;
- Tracé de  $\vec{A}_{a/d}$  en A puis de  $\vec{O}_{p/d}$  en O

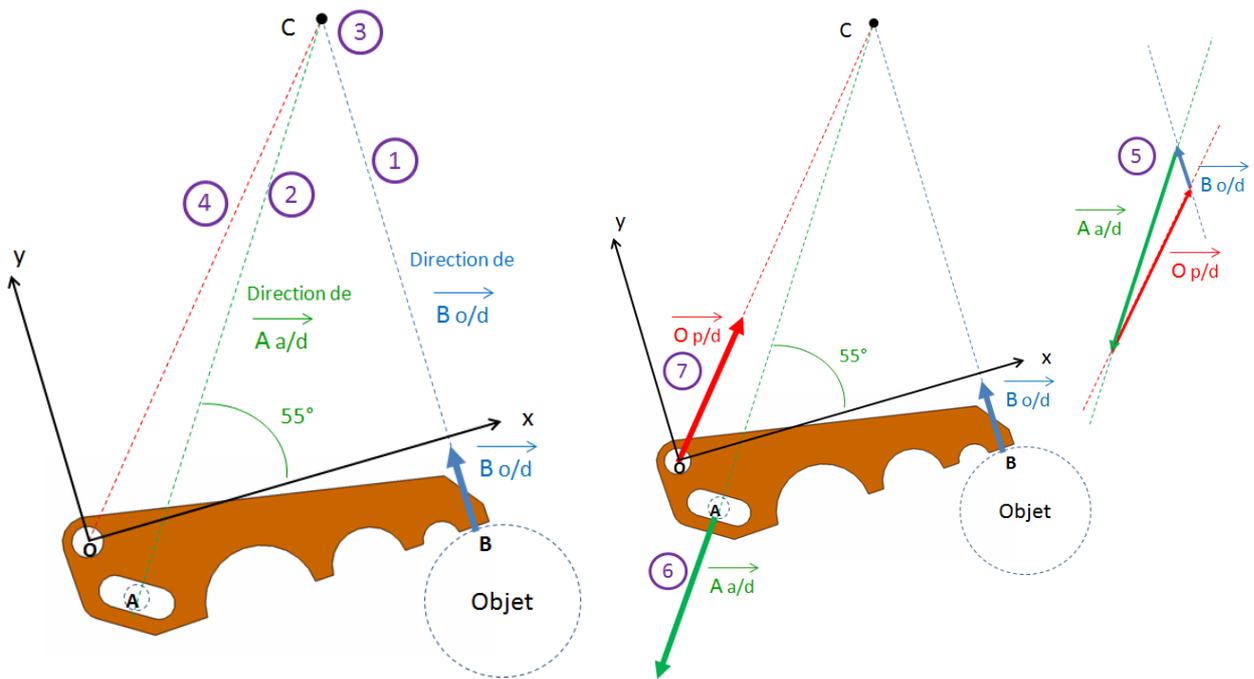


Fig.5 Résolution graphique de l'équilibre statique du doigt de pince lors du serrage d'un objet

### Résultats par la méthode graphique ou donnés par un logiciel:

Action de serrage de l'objet sur le doigt en B	Action de contact de l'axe sur le doigt (Modèle Liaison ponctuelle au point A)	Action de contact de la platine sur le doigt (Modèle Liaison pivot au point O)
$\vec{B}_{o/d} \begin{pmatrix} 0 \\ 22 \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>avec <math>\ \vec{B}_{o/d}\ =22 \text{ N}</math></p>	$\vec{A}_{a/d} \begin{pmatrix} -67 \\ 96 \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>avec <math>\ \vec{A}_{a/d}\ =117 \text{ N}</math></p>	$\vec{O}_{p/d} \begin{pmatrix} 67 \\ 74 \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>avec <math>\ \vec{O}_{p/d}\ =100 \text{ N}</math></p>

Connaissant ces résultats, il est possible par isolement successifs de déterminer toutes les actions mécaniques dans le mécanisme puis de valider le choix des composants et les dimensions des pièces.

### 3. Cas d'un solide soumis à trois forces parallèles:

La résolution se fait en utilisant le théorème du moment résultant puis le théorème de la résultante.

#### Exemple 6: Véhicule électrique Cycab

Le poids du véhicule chargé appliqué est  $\vec{P}_{total}$  appliqué en G. On souhaite déterminer les actions de contact du sol sur les roues avant en M et arrière en N.

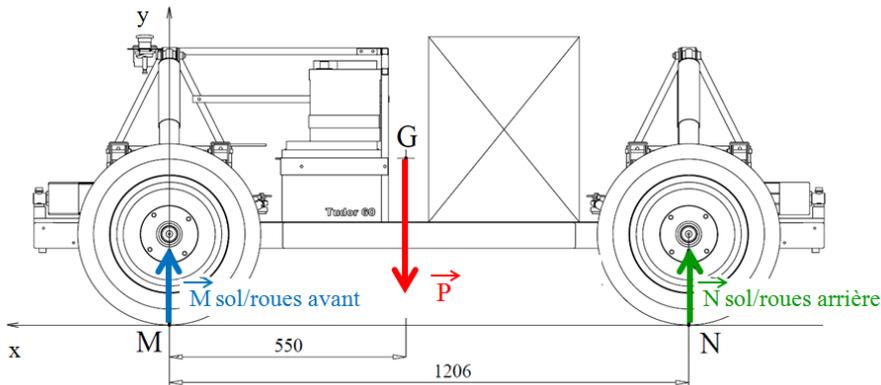


Fig.6. Véhicule Cycab en équilibre sur le sol

Le véhicule Cycab est au repos, en équilibre sur le sol plat. Le plan (G, x, y) est un plan de symétrie du chargement.

#### Bilan des actions mécaniques extérieures sur le véhicule-Modélisation pour résolution analytique ou par logiciel de statique

Le poids du véhicule chargé appliqué en G, son centre de masse	Action de contact du sol sur les 2 roues avant (Modèle Liaison ponctuelle au point M)	Action de contact du sol sur les 2 roues arrière (Modèle Liaison ponctuelle au point N)
$\vec{P} \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\ \vec{P}\ =6400$ N	$\vec{M}_{sol/roues\ avant} \begin{pmatrix} 0 \\ M_{sol/roues\ avant} \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{N}_{sol/roues\ arrière} \begin{pmatrix} 0 \\ N_{sol/roues\ arrière} \\ 0 \end{pmatrix}$
Coordonnées des points dans le repère (M,x,y,z)		
Point G	Point M	Point N
$P \begin{pmatrix} 550 \\ 390 \\ 0 \end{pmatrix}$ en mm	$M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en mm	$N \begin{pmatrix} 1206 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en mm

b. Application du théorème du moment résultant au point M:

$$\vec{M}_M(\vec{M}_{sol/roues\ avant}) + \vec{M}_M(\vec{N}_{sol/roues\ arrière}) + \vec{M}_M(\vec{P}) = \vec{0}$$

$$0 + N_{sol/roues\ arrière} \cdot 1206 - P \cdot 550 = 0$$

soit  $N_{sol/roues\ arrière} = P \cdot \frac{550}{1206} = 6400 \cdot \frac{550}{1206} = 2919$  N

c. Application du théorème de la résultante:

$$\vec{M}_{sol/roues\ avant} + \vec{P} + \vec{N}_{sol/roues\ arrière} = \vec{0}$$

La projection de cette équation vectorielle sur l'axe (M,y) s'écrit:

$$M_{sol/roues\ avant} - P + N_{sol/roues\ arrière} = 0$$

soit

$$M_{sol/roues\ avant} = P - N_{sol/roues\ arrière}$$

$$M_{sol/roues\ avant} = 6400 - 2919 = 3481$$
 N

Synthèse:

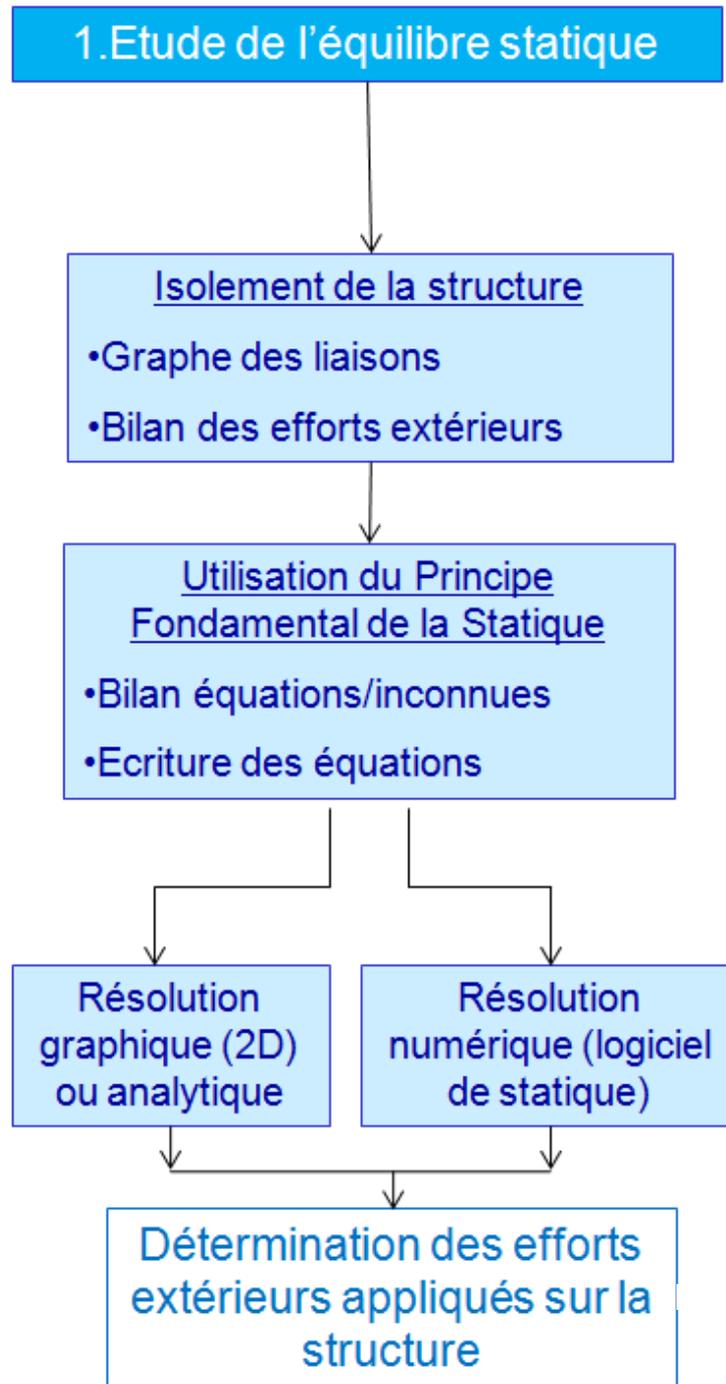
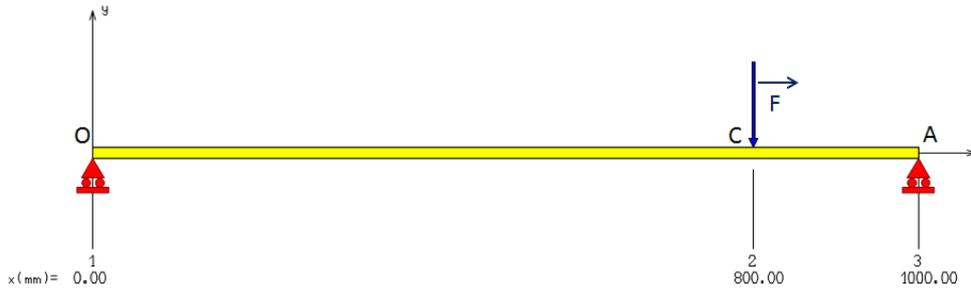


Fig.7 Démarche d'étude de l'équilibre statique d'une structure ou d'une pièce

## Exercices

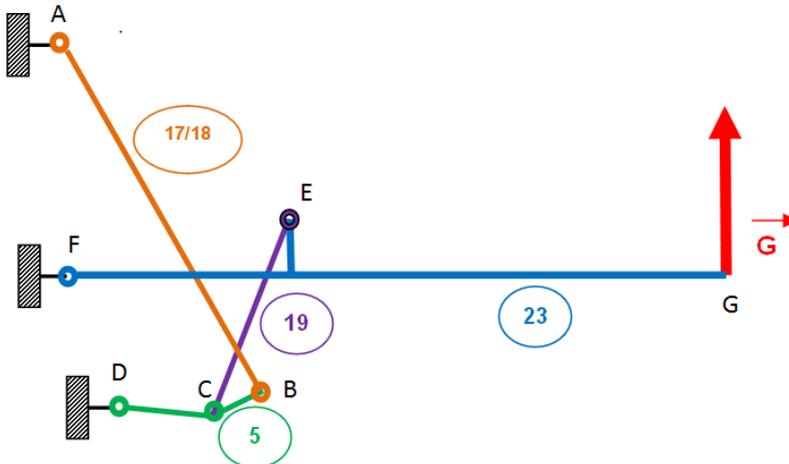
### 1. Equilibre d'une poutre sur deux appuis

Une poutre de section rectangulaire de longueur  $L=OA= 1\text{ m}$  reçoit une charge ponctuelle  $F$  en  $C$  telle que  $F= 100\text{ N}$ .  $OC= 800\text{ mm}$ . Déterminer les forces au niveau des appuis en  $O$  et  $A$ .



### 2. Suspension arrière de moto

En vue de procéder au choix d'un amortisseur de moto tous terrains, on réalise un test en statique sur le mécanisme de suspension arrière représenté ci-dessous sous forme de schéma cinématique:



Le mécanisme est composé d'un bras 23, d'une biellette 19, d'un culbuteur 5, d'un amortisseur 17/18. En premier calcul, l'amortisseur est considéré comme un seul solide non déformable (distance  $AB$  constante). En  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  et  $F$ , les liaisons sont des pivots. En  $G$ , on exerce une force verticale de  $10\ 000\text{ N}$ .

Coordonnées des points:

$F(0,0)$ ,  $E(194, 51)$ ,  $G(584, 0)$ ,  $A(-10, 206)$ ,  $B(168, -104)$ ,  $C(122, -124)$ ,  $D(44, -118)$

On souhaite déterminer l'effort dans l'amortisseur considéré comme un seul solide.

#### 1. Construire le graphe des liaisons.

#### 2. Résolution graphique

- Reproduire le schéma à l'échelle 1:2 sur une feuille A3.
- Isoler la biellette 19 et faire le bilan des actions mécaniques sur 19.
- Que peut-on dire des actions mécaniques en  $C$  et  $E$ ?
- Isoler le bras 23 et faire le bilan des actions mécaniques sur 23.
- Appliquer le PFS et résoudre graphiquement pour trouver l'action en  $E$
- Isoler l'amortisseur 17/18 et faire le bilan des actions mécaniques sur 17/18
- Que peut-on dire des actions mécaniques en  $A$  et  $B$ ?
- Isoler le culbuteur 5 et faire le bilan des actions mécaniques sur 5.
- Appliquer le PFS et résoudre graphiquement pour trouver l'action en  $B$

#### 3. Résolution avec logiciel

Reprendre la démarche précédente dans un logiciel de calcul statique en déclarant les coordonnées des points, les liaisons et les forces connues pour chaque isolement.