

RESISTANCE DES MATERIAUX GENERALITES

I. Généralités

1.1. Buts de la résistance des matériaux

Les buts de la résistance des matériaux sont :

- de calculer les dimensions des pièces de construction de sorte qu'elles résistent en toute sécurité aux efforts prévus par l'étude mécanique,
- de déterminer les déformations des pièces.

Pour cela, il faut :

- déterminer les efforts appliqués au solide étudié,
- étudier ce qui se passe à l'intérieur du matériau et établir des lois,
- à l'aide de ces lois, déterminer les déformations et les dimensions des pièces.

Les dimensions ainsi déterminées doivent :

- éviter la rupture,
- entraîner des déformations élastiques (non permanentes).

1.2. Etude des différentes sollicitations

En résistance des matériaux, les sollicitations suivantes sont étudiées :

- Traction (câbles, barres de charpentes métalliques, tirants ...)
- Compression (poinçons, barres de charpentes métalliques ...)
- Cisaillement (rivets, goupilles, clavettes ...)
- Torsion (arbres de transmission ...)
- Flexion (poutres de ponts roulants, arbres de transmission ...)

1.3. Hypothèses de la RdM

1.3.1. Hypothèses sur le matériau

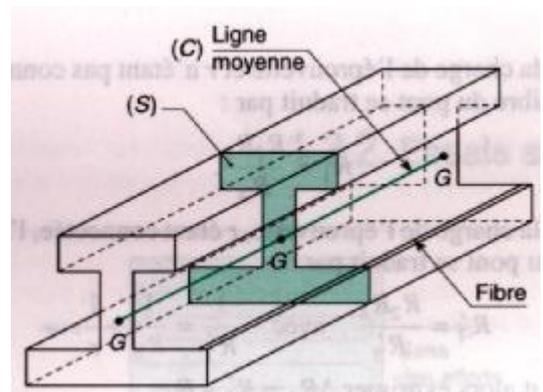
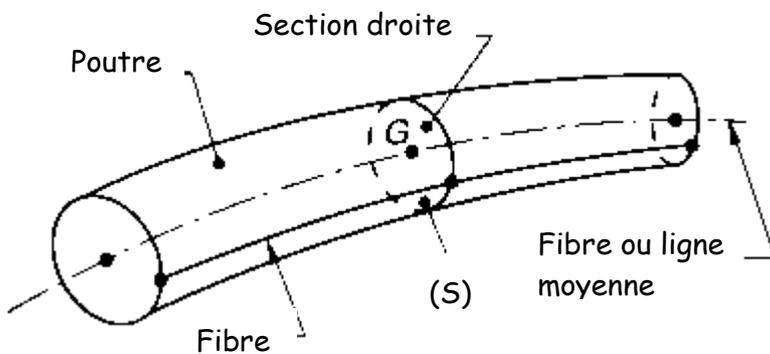
- **Continuité** : la matière est continue. (les distances entre les molécules sont toujours très petites devant les plus petites dimensions que nous aurons à utiliser).
- **Homogénéité** : on admettra que tous les éléments du matériau, aussi petits soient-ils, ont une structure identique. En réalité, aucun matériau n'est parfaitement homogène et si cette hypothèse est proche de la réalité pour la plupart des métaux, on comprend facilement que pour le bois ou le béton elle ne constitue qu'une très grossière approximation.
- **Isotropie** : on admettra, qu'en tous les points et dans toutes les directions autour de ces points, les matériaux possèdent les mêmes propriétés mécaniques. En réalité les matériaux ne possèdent qu'approximativement cette propriété.
L'isotropie, qui semble vérifiée pour les aciers, ne l'est plus pour les matériaux à structure fibreuse (bois, fibres de carbone, etc.) ni pour les matériaux composites.

1.3.2. Hypothèses sur la disposition de la matière

On utilise le modèle de la poutre pour étudier la RdM.

On appelle poutre, un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre de surface G décrit une courbe plane appelée ligne moyenne.

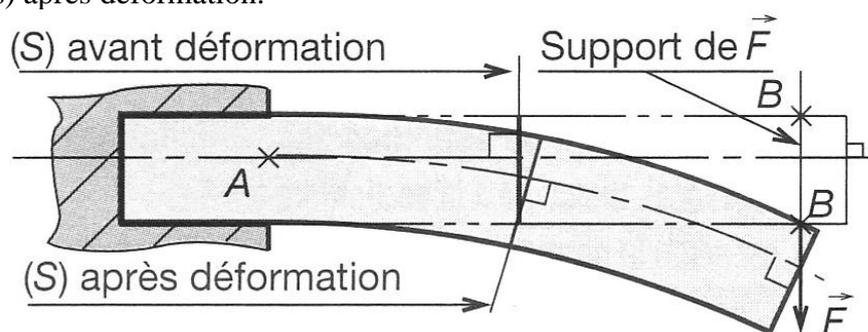
- La ligne moyenne est droite ou à grand rayon de courbure.
- La section droite (S) de centre de surface G est constante ou varie progressivement.
- La poutre a une grande longueur par rapport aux dimensions transversales.
- La poutre possède un plan de symétrie.
- Les points disposés de façon identique sur les sections droites jouissent de certaines propriétés communes ; on dit qu'ils appartiennent à des **fibres**.
- La ligne moyenne ou fibre moyenne possède des propriétés particulières.



1.3.3. Hypothèses sur les déformations

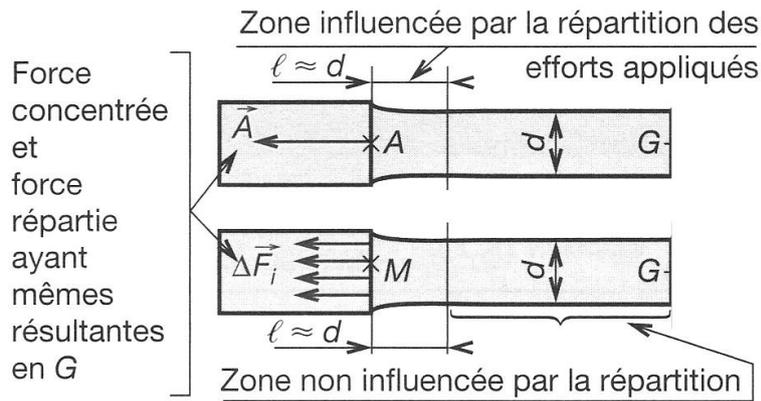
- **Hypothèse de Navier-Bernoulli**

Les sections planes normales aux fibres avant déformation demeurent planes et normales aux fibres (déformées) après déformation.



- **Hypothèse de Barré Saint Venant**

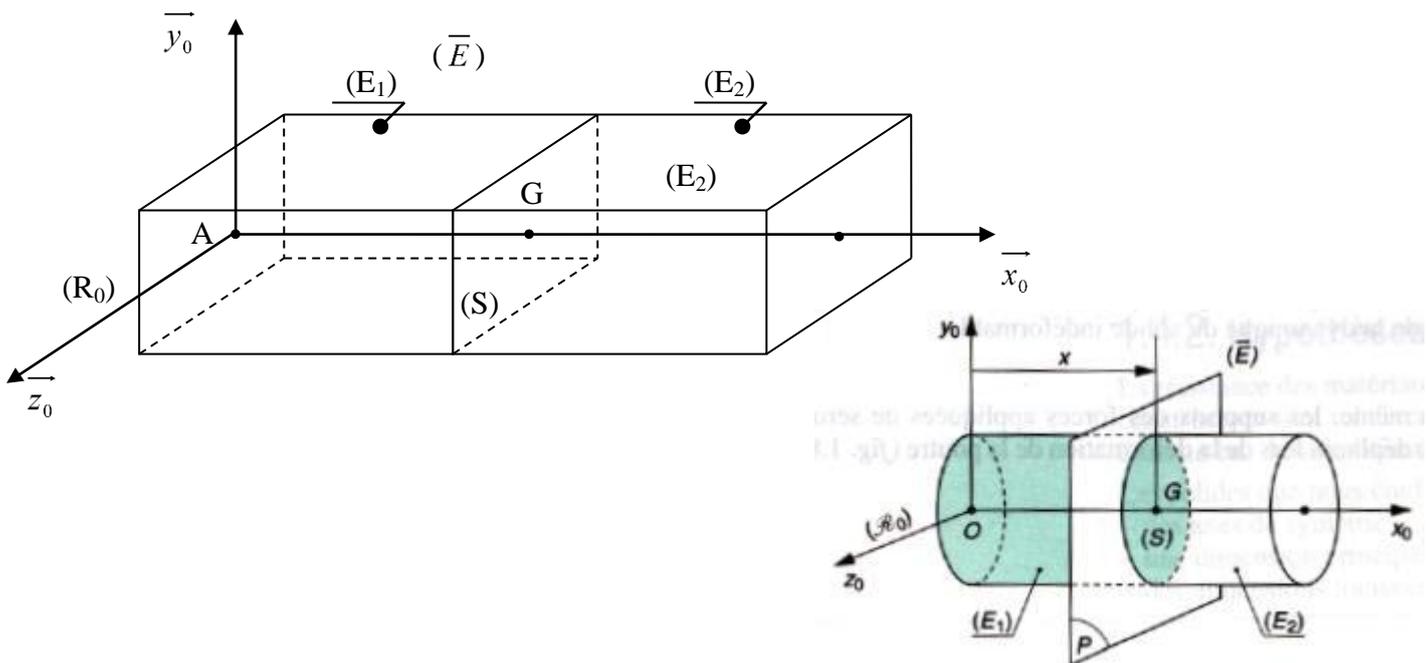
Dans une section droite (S) éloignée de la zone où les charges sont appliquées ($l > d$), les résultats obtenus ne dépendent pas de la répartition des actions mécaniques.



II. Torseur des efforts de cohésion dans une section droite d'une poutre

Dans un solide, il est nécessaire d'admettre l'existence d'un système de forces internes de cohésion, actions intermoléculaires, qui permettent entre autre au solide de conserver sa forme propre.

En RDM, nous serons très souvent amenés à effectuer une coupure fictive d'un solide (E) par un plan (P). Ce plan divise le solide en deux parties et on peut par exemple considérer comme un système matériel la partie (E₁) de (E).



2.1. Définition et repérage de la coupure fictive

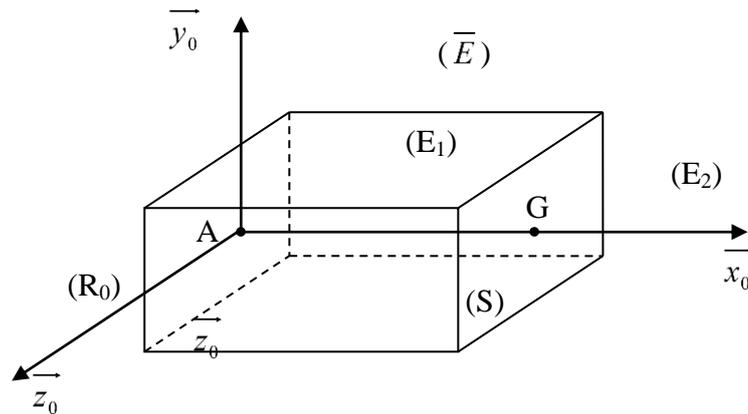
$R_0 (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est un repère lié à la poutre.

Ce repère est choisi tel que $(O; \vec{x}_0)$ soit porté par la ligne moyenne de la poutre.

La coupure fictive par le plan (P) divise le solide (E) en deux parties (E₁) et (E₂).

On convient de déplacer le plan de coupure (P) d'une extrémité à l'autre de la poutre et toujours dans le même sens. Il en résulte que le volume de l'un des tronçons augmente et que celui de l'autre diminue.

On appellera (E_1) le volume dont le tronçon croît.

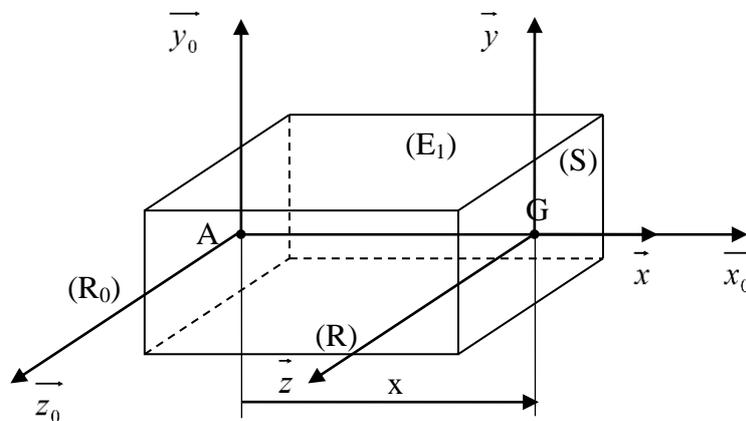


2.2. Définition du torseur des efforts de cohésion

Les actions mécaniques que le tronçon (E_2) exerce sur le tronçon (E_1) à travers la section droite fictive sont des efforts intérieurs à la poutre (E) . On modélise ces efforts par un torseur appelé **torseur de cohésion**. Les éléments de réduction du torseur sont exprimés au point G centre de surface de (S) .

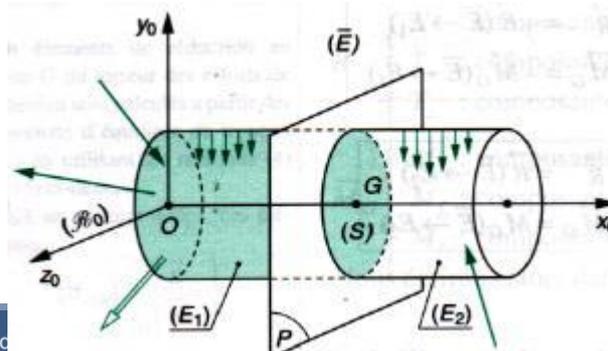
$$\{T_{coh}\} = \{T(E_2 \rightarrow E_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{array} \right\}_G$$

\vec{R} et \vec{M}_G sont des fonctions de l'abscisse x du centre de surface G de (S) .



2.3. Détermination des éléments de réduction en G du torseur de cohésion

2.3.1. Etude de l'équilibre de la poutre (E)



La poutre (E) est soumise de la part de l'ensemble (\bar{E}) à des actions mécaniques extérieures concentrées ou réparties.

Notons $\vec{R}(\bar{E} \rightarrow E)$ la résultante générale et $\vec{M}_G(\bar{E} \rightarrow E)$ le moment résultant au point G du torseur des actions mécaniques de (\bar{E}) sur (E).

La poutre (E) étant en équilibre, le principe fondamental de la statique permet d'écrire :

$$\{T(\bar{E} \rightarrow E)\} = \{\vec{0}\}$$

ce qui entraîne au point G

$$\begin{cases} \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) = \vec{0} \\ \vec{M}_G(\bar{E} \rightarrow E) = \vec{0} \end{cases} \quad \boxed{1}$$

En utilisant la notion de coupure fictive définie au paragraphe précédent, les actions mécaniques de (\bar{E}) sur (E) peuvent être séparées en deux groupes :

- Le torseur des actions mécaniques extérieures à la poutre appliquées sur le tronçon (E_1) et dont on peut donner les éléments de réduction en G

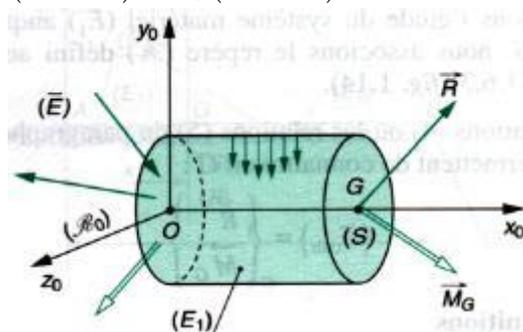
$$\{T(\bar{E} \rightarrow E_1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E_1) \\ \vec{M}_G(\bar{E} \rightarrow E_1) \end{Bmatrix}$$

- Le torseur des actions mécaniques extérieures à la poutre appliquées sur le tronçon (E_2) et dont on peut donner les éléments de réduction en G

$$\{T(\bar{E} \rightarrow E_2)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E_2) \\ \vec{M}_G(\bar{E} \rightarrow E_2) \end{Bmatrix}$$

Les équations (1) d'équilibre de la poutre (E) peuvent alors s'écrire :

$$\begin{cases} \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E_1) + \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E_2) = \vec{0} \\ \vec{M}_G(\bar{E} \rightarrow E_1) + \vec{M}_G(\bar{E} \rightarrow E_2) = \vec{0} \end{cases} \quad \boxed{2}$$



2.3.2. Relation entre le torseur des efforts extérieurs et le torseur des efforts de cohésion

Isolons le tronçon ($E1$).

Celui-ci est en équilibre sous l'action de deux torseurs d'actions mécaniques :

- Le torseur des actions mécaniques du milieu extérieur (E) sur (E1) dont on peut donner les éléments de réduction en G

$$\{T(\bar{E} \rightarrow E_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E_1) \\ \vec{M}_G(\bar{E} \rightarrow E_1) \end{array} \right\}$$

- Le torseur des actions mécaniques que le tronçon (E2) exerce sur (E1) à travers la section droite fictive (S)

$$\{T(\bar{E} \rightarrow E_2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E_2) \\ \vec{M}_G(\bar{E} \rightarrow E_2) \end{array} \right\}$$

Appliquons à (E1) le principe fondamental de la statique:

$$\{T(\bar{E} \rightarrow E1)\} + \{T_{coh}\} = \{0\}$$

Les équations d'équilibre du tronçon (E1) s'écrivent donc en G

$$\begin{array}{l} \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E_1) + \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_G(\bar{E} \rightarrow E_1) + \vec{M}_G = \vec{0} \end{array} \quad \boxed{3}$$

Compte tenu des équations (3) et (2) ci-dessus, les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion peuvent donc s'exprimer de deux façons :

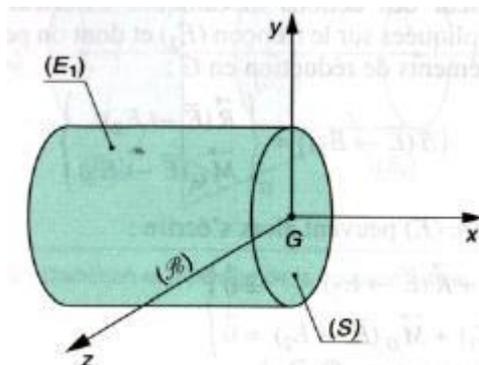
Première écriture

$$\begin{array}{l} \vec{R} = -\vec{R}(\bar{E} \rightarrow E_1) \\ \vec{M}_G = -\vec{M}_G(\bar{E} \rightarrow E_1) \end{array} \quad \boxed{4}$$

Deuxième écriture

$$\begin{array}{l} \vec{R} = \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E_2) \\ \vec{M}_G = \vec{M}_G(\bar{E} \rightarrow E_2) \end{array} \quad \boxed{5}$$

2.3.3. Repère de définition des sollicitations



Soit $R = (G; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère local lié à la section droite fictive (S).

Ce repère est tel que $(G; \vec{x})$ définisse la normale extérieure en G à (S) relative au tronçon (E_1) .

Les axes $(G; \vec{y})$ et $(G; \vec{z})$ appartiennent alors au plan (P) de la section droite (S) dont ils sont généralement des axes de symétrie (ou axes principaux d'inertie).

Ce repère (R) est appelé *repère de définition des sollicitations*. Il sera toujours direct.

2.3.4. Dénomination des composantes des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion dans le repère de définition

Reprenons l'étude du système matériel (E_1) auquel, au point G , nous associons le repère (R) .

Les relations (4) ou les relations (5) nous permettent de connaître le torseur de cohésion en G .

Définitions :

- \vec{N} : c'est la projection de \vec{R} sur la normale extérieure $(G; \vec{x})$.
- \vec{T} : c'est la projection de \vec{R} sur le plan de section droite $(G; \vec{y}, \vec{z})$.
- \vec{M}_t : c'est la projection de \vec{M}_G sur la normale extérieure $(G; \vec{x})$.
- \vec{M}_f : c'est la projection de \vec{M}_G sur le plan de section droite $(G; \vec{y}, \vec{z})$.

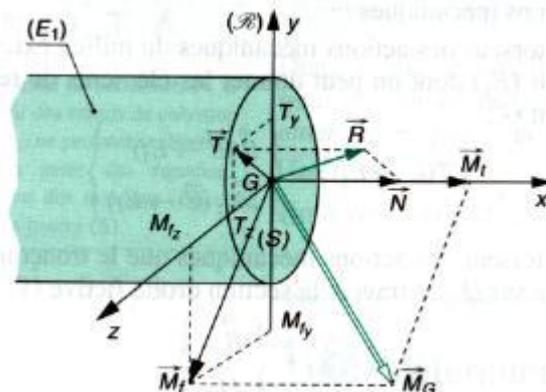
Par conséquent :

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{T} + \vec{N} \\ \vec{M}_G = \vec{M}_t + \vec{M}_f \end{cases}$$

\vec{T} et \vec{M}_f n'ayant, en général, pas de direction privilégiée dans le plan $(G; \vec{y}, \vec{z})$, il est pratique d'utiliser les composantes algébriques de ces vecteurs sur les axes du repère (R) :

Définitions :

- N : composante algébrique de l'effort normal \vec{N} sur $(G; \vec{x})$.
- T_y : composante algébrique de l'effort tranchant \vec{T} sur $(G; \vec{y})$.
- T_z : composante algébrique de l'effort tranchant \vec{T} sur $(G; \vec{z})$.
- M_t : composante algébrique du moment de torsion \vec{M}_t , sur $(G; \vec{x})$.
- M_{fy} : composante algébrique du moment de flexion \vec{M}_f sur $(G; \vec{y})$.
- M_{fz} : composante algébrique du moment de flexion \vec{M}_f sur $(G; \vec{z})$.



Nous écrivons alors dans (R):

$$\vec{R} = N\vec{x} + T_y\vec{y} + T_z\vec{z}$$

$$\vec{M}_G = Mt\vec{x} + Mfy\vec{y} + Mfz\vec{z}$$

2.3.5. Diagrammes

Les composantes algébriques N , T_y , T_z , Mt , Mfy , Mfz varient en fonction de la position du centre de surface G de la section droite **fictive** (S).

Le point G est **défini** par son abscisse x telle que : $\vec{OG} = x\vec{x}$.

La représentation graphique des fonctions $N(x)$, $T_y(x)$, $T_z(x)$, $Mt(x)$, $Mfy(x)$, $Mfz(x)$ donne les diagrammes des composantes des éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion.

Notons que ces fonctions peuvent présenter des discontinuités, par exemple quand le plan (P) de (S) rencontre le point d'application d'une charge concentrée ou un moment localisé.

2.4. Définition des sollicitations

