Masse et Moments d’inerties

de solides

et

d’assemblages de solides

Objectifs:- Déterminer le centre d’inertie d’un solide

- Déterminer les moments d’inertie d’un solide par rapport à un axe

0.Définitions

Masse: quantité de matière d'un corps; elle s 'exprime en kilogramme (kg).

Masse volumique (en anglais *density*): rapport entre la masse et le volume d 'un corps homogène; elle s 'exprime en kilogramme par mètre cube (kg/m^3).

Densité (en anglais *specific gravity* ou *relative density*):rapport des masses de deux volumes égaux de matière donnée et d 'eau douce.

Inertie: opposition que présente un corps à un mouvement donné ou, s'il est déjà en mouvement, à une modification de direction ou de vitesse.

Centre d'inertie: ou centre de masse G. Pour un système de solides (S), le centre d'inertie est le barycentre des masses G_S.

La masse permet de caractériser la difficulté à mettre en mouvement un solide pour un mouvement de translation seul.

Pour des mouvements complexes (translations et rotations), la masse seule ne suffit plus pour caractériser la difficulté à mettre en mouvement un solide, la répartition de la masse sur le solide est alors nécessaire.

Le moment d 'inertie et le produit d 'inertie caractérisent la répartition de masse d 'un solide autour d 'un axe. Ils s 'expriment en kilogramme mètre carré ($kg.m^2$).

Moment d'inertie: caractérise la répartition des masses d 'un solide autour d'un axe. Plus la valeur du moment d 'inertie est grande, plus il sera difficile de mettre le solide en rotation autour de cet axe.

Produit d'inertie: caractérise l'absence de symétrie de la répartition des masses autour des 3 axes d'un repère lié à un solide. Les produits d 'inerties créent des effets de balourd perpendiculaires à l'axe autour duquel tourne le solide.

0.Définitions (suite)

Centre d'inertie et Centre de gravité: sont-ils identiques?

Centre d'inertie: **ou centre de masse G. Pour un système de solides (S), le centre d'inertie est le barycentre des masses G_S.**

Centre de gravité: **Point d'application de la résultante des efforts de pesanteur.**

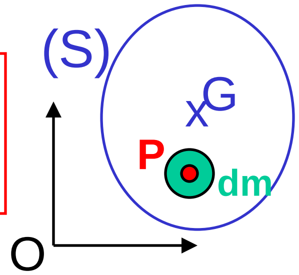
La pesanteur est $\vec{g} = -g\,\vec{z}$ où $\vec{z}$ est l'axe local vertical ascendant. (On prendra g = 9.81 m/s²)

Le champ de pesanteur est localement constant. On considèrera que les systèmes matériels sont plongés dans un champ de pesanteur uniforme. Dans ce cas, le centre d'inertie G (barycentre des masses) est confondu avec le centre de gravité (point d'application de la résultante des efforts de pesanteur).

1.Centre d'inertie ou centre de masse

1.1.Définition:

$$\boxed{M.\overrightarrow{OG} = \int_{(S)} \overrightarrow{OP}.\, dm}$$



M: masse du solide

dm: petit élément de volume du solide

(S): solide

Si le solide admet un plan, un axe ou un centre de symétrie, son centre de masse se trouve dans ce plan, cet axe ou au centre de symétrie.

1.2.Centre de masse d 'un ensemble de solides (assemblage)

Si chaque solide (Si) composant l'assemblage a pour masse mi et pour centre de masse Gi alors l 'assemblage (S) des n solides Si a pour masse M et pour centre de masse G tels que:

$$\boxed{M = \sum_{i=1}^{n} mi = m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \quad \text{et} \quad \boxed{M \, . \, \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} mi \, \overrightarrow{OGi}}$$

Donc le point G aura pour coordonnées (x_G, y_G, z_G) telles que:

$$x_G = \frac{m_1.x_{G1} + m_2.x_{G2} + \ldots + m_n.x_{Gn}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

y_G et z_G sont obtenues de la même manière.

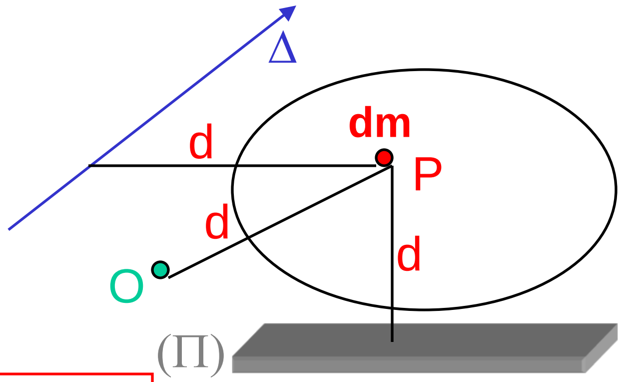
$$y_G = \frac{m_1.y_{G1} + m_2.y_{G2} + \ldots + m_n.y_{Gn}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

$$z_G = \frac{m_1.z_{G1} + m_2.z_{G2} + \ldots + m_n.z_{Gn}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

2. Moments et produits d'inertie

2.1.Définition

Le moment d 'inertie caractérise la répartition des masses d 'un solide autour d 'un axe. Plus la valeur du moment d 'inertie est grande, plus il sera difficile de mettre le solide en rotation autour de cet axe.



Le moment d 'inertie I d 'un solide (S) par rapport à un point O, un plan (Π) ou un axe Δ est défini par:

$$\boxed{I = \int_{(S)} d^2 \, .dm}$$

Où d est la distance du point P de masse dm au point O, au plan (Π) ou à l 'axe Δ

Le produit d 'inertie caractérise l 'absence de symétrie de la répartition des masses autour des 3 axes d 'un repère lié à un solide. Les produits d 'inerties créent des effets de balourd perpendiculaires à l 'axe autour duquel tourne le solide.

Unité des moments et produits d 'inertie: kg.m²

<u>Moments d'inertie par rapport aux trois axes du repère R (x,y,z):</u>

$$Ixx = \int_{(S)} (y^2 + z^2) \, dm = A$$

$$Iyy = \int_{(S)} (x^2 + z^2) \, dm = B$$

$$Izz = \int_{(S)} (x^2 + y^2) \, dm = C$$

<u>Produits d'inertie par rapport au repère R (x,y,z):</u>

$$Iyz = \int_{(S)} (yz) \, dm = Iyz = D$$

$$Ixz = \int_{(S)} (xz) \, dm = Izx = E$$

$$Ixy = \int_{(S)} (xy) \, dm = Ixy = F$$

2.2.Opérateur d 'inertie d'un solide S en un point O dans la base R(x,y,z)

$$I(O,R,S) = \begin{bmatrix} I_{oxx} & -I_{oxy} & -I_{oxz} \\ -I_{oxy} & I_{oyy} & -I_{oyz} \\ -I_{oxz} & -I_{oyz} & I_{ozz} \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$$

I_{oxx} ou A: moment d 'inertie de (S) par rapport à l 'axe (O, x)

I_{oyy} ou B: moment d 'inertie de (S) par rapport à l 'axe (O, y)

I_{ozz} ou C: moment d 'inertie de (S) par rapport à l 'axe (O, z)

I_{oyz} ou D: produit d 'inertie de (S) par rapport aux axes (O, y) et (O,z)

I_{oxz} ou E: produit d 'inertie de (S) par rapport aux axes (O, x) et (O,z)

I_{oxy} ou F: produit d 'inertie de (S) par rapport aux axes (O, x) et (O,y)

Cas particuliers:

Le solide possède une symétrie de révolution autour de z (ex: un cylindre)

$$I(O,R,S) = \begin{bmatrix} Ioxx & 0 & 0 \\ 0 & Ioxx & 0 \\ 0 & 0 & Iozz \end{bmatrix}$$

Ioxx = Ioyy

et

les produits d'inertie sont nuls

Le solide possède une symétrie de révolution autour de z et de y (par ex: une sphère)

$$I(O,R,S) = \begin{bmatrix} Ioxx & 0 & 0 \\ 0 & Ioxx & 0 \\ 0 & 0 & Ioxx \end{bmatrix}$$

Ioxx = Ioyy =Iozz

et

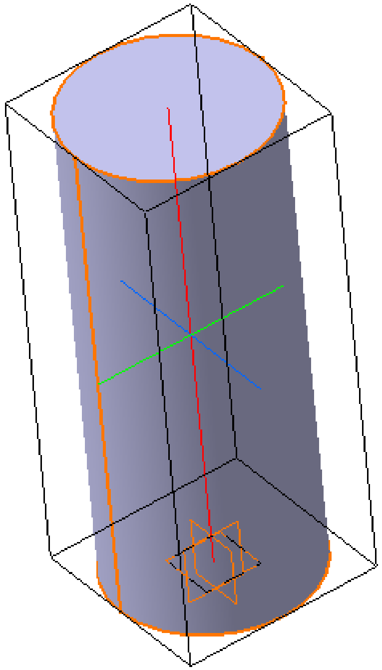
les produits d'inertie sont nuls

2.4.1. Opérateur cylindrique

$$I(G,R,S) = \begin{bmatrix} Ioxx & 0 & 0 \\ 0 & Ioxx & 0 \\ 0 & 0 & Iozz \end{bmatrix}$$

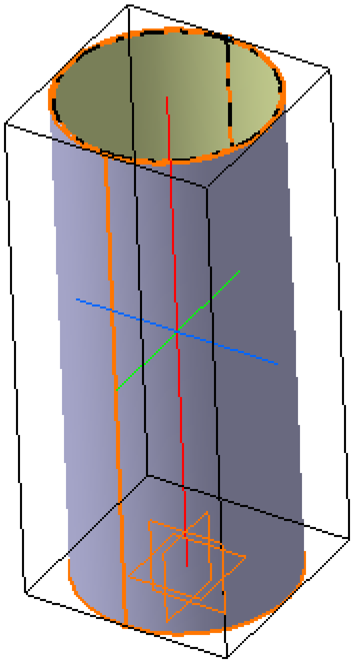
Cylindre plein (rayon R ; hauteur H) :

$$Ioxx = \frac{1}{12} M\,(3\,R^2 + H^2) \qquad Iozz = \frac{M\,R^2}{2}$$



Enveloppe cylindrique(rayon R ; hauteur H):

$$Ioxx = \frac{1}{12} M\,(6\,R^2 + H^2) \qquad Iozz = M\,R^2$$



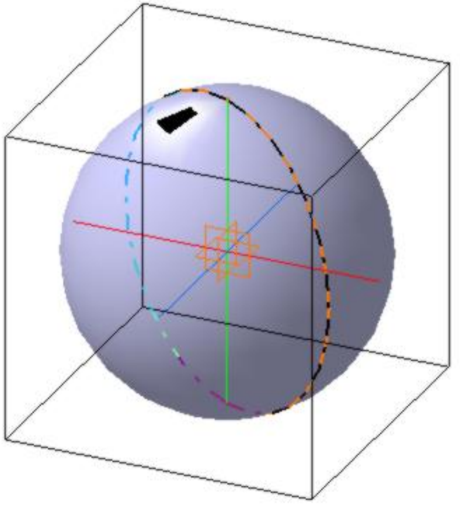
2.4.Opérateurs d ’inertie des solides élémentaires en G centre de gravité du solide

2.4.1. Opérateur sphérique

$$I(G,R,S)=\begin{bmatrix} Ioxx & 0 & 0 \\ 0 & Ioxx & 0 \\ 0 & 0 & Ioxx \end{bmatrix}$$

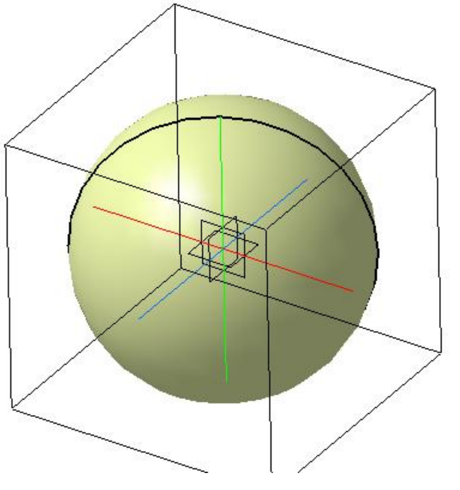
Sphère pleine de rayon R:

$Ioxx = 2/5\ M\ R^2$



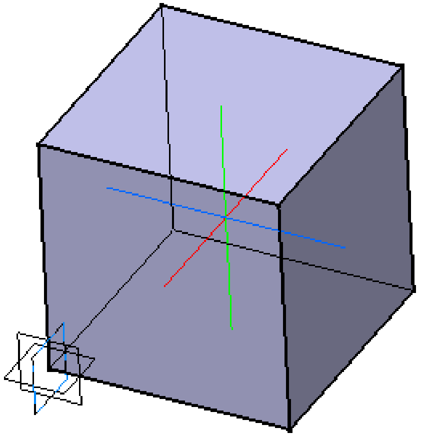
Enveloppe sphérique(rayon R):

$Ioxx= 2/3\ M\ R^2$



Cube plein de côté A:

$Ioxx = 1/6\ M\ a^2$



2.3.Théorème de Huyghens (1629-1695)

Ce théorème permet de calculer les moments et produits d 'inertie d 'un solide en n 'importe quel point.

Moments d'inertie par rapport aux trois axes du repère R (x,y,z):

$A = A_G + M\,(y_G^2 + z_G^2)$

$B = B_G + M\,(x_G^2 + z_G^2)$

$C = C_G + M\,(x_G^2 + y_G^2)$

Produits d'inertie par rapport au repère R (x,y,z):

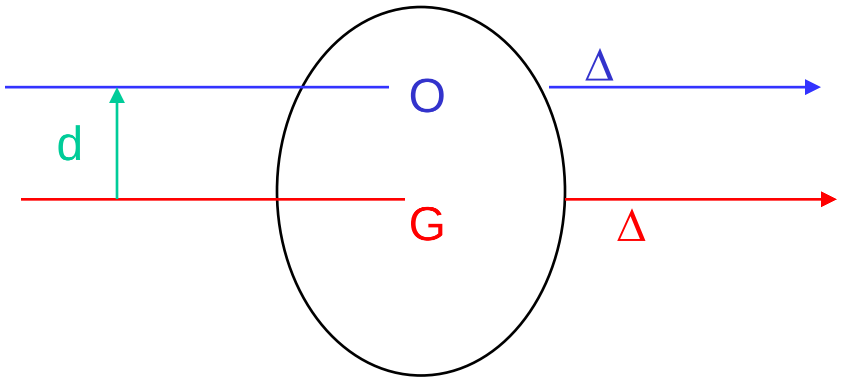
$D = D_G + M\,(y_G \cdot z_G)$

$E = E_G + M\,(x_G \cdot z_G)$

$F = F_G + M\,(x_G \cdot y_G)$

$$\boxed{I\,(O,\Delta,S) = I(G,\Delta,S) + M.d^2}$$

$\overrightarrow{OG}$ a pour coordonnées (x_G, y_G, z_G)



Un moment d 'inertie par rapport à un axe (ou à un plan) est toujours minimum lorsque cet axe (ou ce plan) passe par le centre de gravité du solide.

2.3.Théorème de Huyghens (suite)

Expression en coordonnées cartésiennes x,y,z

Moments d'inertie par rapport aux trois axes du repère R (x,y,z):

$Ioxx = I_Gxx + M\ (y_G^2 + z_G^2)$

$Ioyy = I_Gyy + M\ (x_G^2 + z_G^2)$

$Iozz = I_Gzz + M\ (x_G^2 + y_G^2)$

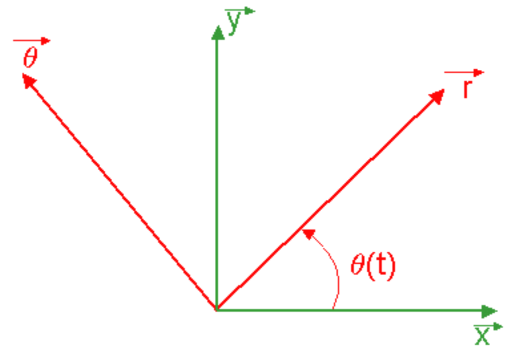
Produits d'inertie par rapport au repère R (x,y,z):

$Iyz = Iyz_{\ G} + M\ (y_G \,.\, z_G)$

$Ixz = Ixz_{\ G} + M\ (x_G \,.\, z_G)$

$Ixy = Ixy_{\ G} + M\ (x_G \,.\, y_G)$

Expression en coordonnées cylindriques rr,rθ,z



Moments d'inertie par rapport aux trois axes du repère R (r,θ,z):

$Irr = I_Grr + M\ (r\theta_G^2 + z_G^2)$

$I\theta\theta = I_G\theta\theta + M\ (rr_G^2 + z_G^2)$

$Izz = I_Gzz + M\ (rr_G^2 + r\theta_G^2)$

Produits d'inertie par rapport au repère R (r,θ,z):

$Ir\theta = I_Gr\theta + M\ (r\theta_G \,.\, z_G)$

$Irz = I_Grz + M\ (rr_G \,.\, z_G)$

$I\theta z = I_G\theta z + M\ (rr_G \,.\, r\theta_G)$