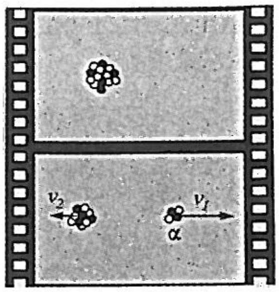
Beregning af Q-Værdier

Vi vil finde Q-værdien, når en radioaktiv kerne henfalder under udsendelse af en α-partikel. Vi starter med at se på det tilfælde, hvor "moderpartiklen" ligger stille.



Da den samlede impuls før sønderdelingen er nul, må det samme gælde efter sønderdelingen

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \qquad (*)$$

Q-værdien, dvs. den samlede kinetiske energi efter sønderdelingen, er

$$Q = \frac{1}{2} \cdot m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 v_2^2$$

Vi kan også udtrykke Q-værdien ved hjælp af den hastighed v, hvormed partiklerne fjerner sig fra hinanden efter stødet

$$v = v_2 - v_1$$

Ifølge (*) kan den indbyrdes hastighed udtrykkes ved såvel v_2 som v_1 på fælgende måde

$$v = -\frac{m_1}{m_2} \cdot v_1 - v_1 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v$$

$$v = v_2 + \frac{m_2}{m_1} \cdot v_2 \quad \Leftrightarrow \quad v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v$$

Ved indsættelse fås

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot v^2$$

På denne form kan Q-værdien beregnes af en vilkårlig iagttager, da alle iagttagere finder den samme indbyrdes hastighed. Specielt behøver partiklen altså ikke længere ligge stille før sønderdelingen.

Eks. 1:

Lad os se på α-henfaldet:

$$^{239}_{94}Pu \rightarrow {}^{235}_{92}U + {}^{4}_{2}He$$

Q-værdien er $-(m_U + m_{He} - m_{Pu}) \cdot c^2 =$

$(235,043944 + 4,002603 - 239,052176) u \cdot c^2 = 0,005629 u \cdot c^2 = \underline{5,243 \text{ MeV}}$

Nu er Q-værdien også (se ovenfor)

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_\alpha \cdot m_U}{m_\alpha + m_U} \cdot v^2$$

Vi får derfor

$$\frac{1}{2}\cdot m_{\alpha}\cdot\frac{235}{239}\cdot v^2 = 0{,}005629u\cdot c^2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{v}{c} = 0{,}0535$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{v = 1{,}604\cdot 10^7 \text{ m/s}}$$

Ifølge formlerne forrige side fås nu

$$v = -\frac{m_U}{m_{\alpha} + m_U}\cdot v = -\frac{235}{239}\cdot v = 1{,}577\cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$v_U = \frac{m_{\alpha}}{m_{\alpha} + m_U}\cdot v = \frac{4}{239}\cdot v = 0{,}027\cdot 10^7 \text{ m/s}$$

Idet masserne er $m_{\alpha} = 4{,}001506u$ og $m_U = 234{,}993473u$ kan de kinetiske energier beregnes:

$$E_{\alpha} = \frac{1}{2}\cdot m_{\alpha}\cdot(1{,}577\cdot 10^7 \text{ m/s})^2 = 5{,}155 \text{ MeV}$$

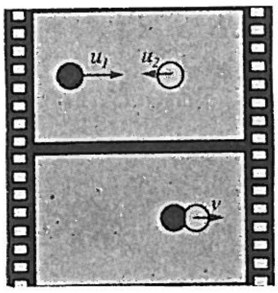
$$E_U = \frac{1}{2}\cdot m_U\cdot(0{,}027\cdot 10^7 \text{ m/s})^2 = 0{,}088 \text{ MeV}$$

α-partiklen og Uran-kernen deler altså den kinetiske i forholdet 235:4. Ved α-henfald, som kun forekommer for kerner med A > 143, er det altså α-partiklen, der får langt den største del af den samlede kinetiske energi.

Hvis vi optager en film af en sønderdelingsproces og afspiller den baglæns, får vi et fuldstændig uelastisk stød, hvor vi har den maksimale omdannelse af kinetisk energi. Vi kan derfor overføre resultaterne fra før, idet vi blot skal skifte fortegn på Q-værdien, da vi jo bytter om på før og efter

$$Q = -\frac{1}{2}\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{m_1 + m_2}\cdot u^2$$

hvor $u = u_1 - u_2$



Hvis f.eks. to protoner støder sammen, kan vi maksimalt omdanne

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{2m}\cdot u^2 = \frac{1}{4}\cdot m\cdot u^2$$

Denne del af den kinetiske energi kan f.eks. omdannes til andre elementarpartikler. Hvis den ene proton ligger stille før stødet, kan vi derfor kun udnytte halvdelen af den indkommende protons energi.

Hvis de i stedet bevæger sig mod hinanden med lige store modsat rettede hastigheder u_1 og u_2, er deres indbyrdes hastighed det dobbelte, hvorfor Q-værdien bliver fire gange så stor. Vi kan derfor omsætte deres samlede kinetiske energi til andre partikler. Frontale sammenstød giver et langt større udbytte end stød mod et fast mål.

Eks. 2:

Vi lader en α-partikel støde ind i en hvilende Nitrogen-kerne:

$$^{4}_{2}He + ^{14}_{7}N \rightarrow ^{17}_{8}O + ^{1}_{1}H$$

Den bedste udnyttelse af α-partiklens kinetiske energi sker ved et centralt, fuldstændig uelastisk stød:

$$|Q| \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{m_\alpha \cdot m_N}{m_\alpha + m_N} \cdot u^2 = \frac{14}{18} \cdot E_\alpha$$

Nu udregnes Q-værdien:

$$Q = -(m_O + m_H - m_{He} - m_N) \cdot c^2 =$$

$$-(16{,}999133 + 1{,}007825 - 4{,}002603 - 14{,}003074) u \cdot c^2 =$$

$$-0{,}001281 u \cdot c^2 = \underline{-1{,}193 \text{ MeV}}$$

Dvs.

$$E_\alpha \geqq \frac{18}{14} \cdot |Q| = 1{,}534 \text{ MeV}$$

Impuls- og energibevarelse kræver altså at

$$\underline{E_\alpha \geqq 1{,}534 \text{ MeV}}$$

for at reaktionen kan forløbe !