Bruchgleichungen

Gleichungen mit einer Lösungsvariablen im Nenner eines Bruchs heißen Bruchgleichungen.

Definitionsmenge: Nenner ≠ 0

Lösungsweg:

1. Multiplikation mit dem Hauptnenner
2. Äquivalenzumformungen
3. Durch Einsetzen Ergebnisse auf ihre Richtigkeit prüfen

Beispiel:

$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = 1$ | · (x -1)(x+1) →Multiplikation mit dem Hauptnenner

$\frac{1\,(x-1)(x+1)}{x-1} + \frac{2\,(x-1)(x+1)}{x+1} = (x-1)(x+1)$ | kürzen

$(x+1) + 2\,(x-1) = (x-1)(x+1)$ | ausmultiplizieren

$x + 1 + 2x - 2 = x^2 - 1$ | zusammenfassen

$3x - 1 = x^2 - 1$ | + 1 ; -3x

$0 = x^2 - 3x$ | x ausklammern um die Lösungen zu erhalten

$0 = x\,(x - 3)$

$x_1 = 0$; $x_2 = 3$ erfüllen die Bruchgleichung

Ergebnisse auf Richtigkeit prüfen:

$x_1 = 0$ einsetzen : $\frac{1}{0-1} + \frac{2}{0+1} = 1 \Leftrightarrow -1 + 2 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ (wahre Aussage)

$x_2 = 3$ einsetzen : $\frac{1}{3-1} + \frac{2}{3+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ (wahre Aussage)

Funktionen und ihre Graphen

Eine Funktion f ist eine Rechenvorschrift, die der Zahl x jeweils eine Zahl y zuordnet.

Schreibweise: $y = f(x)$.

In einer Wertetabelle können x-Werte und zugehörige Funktionswerte y dargestellt werden.

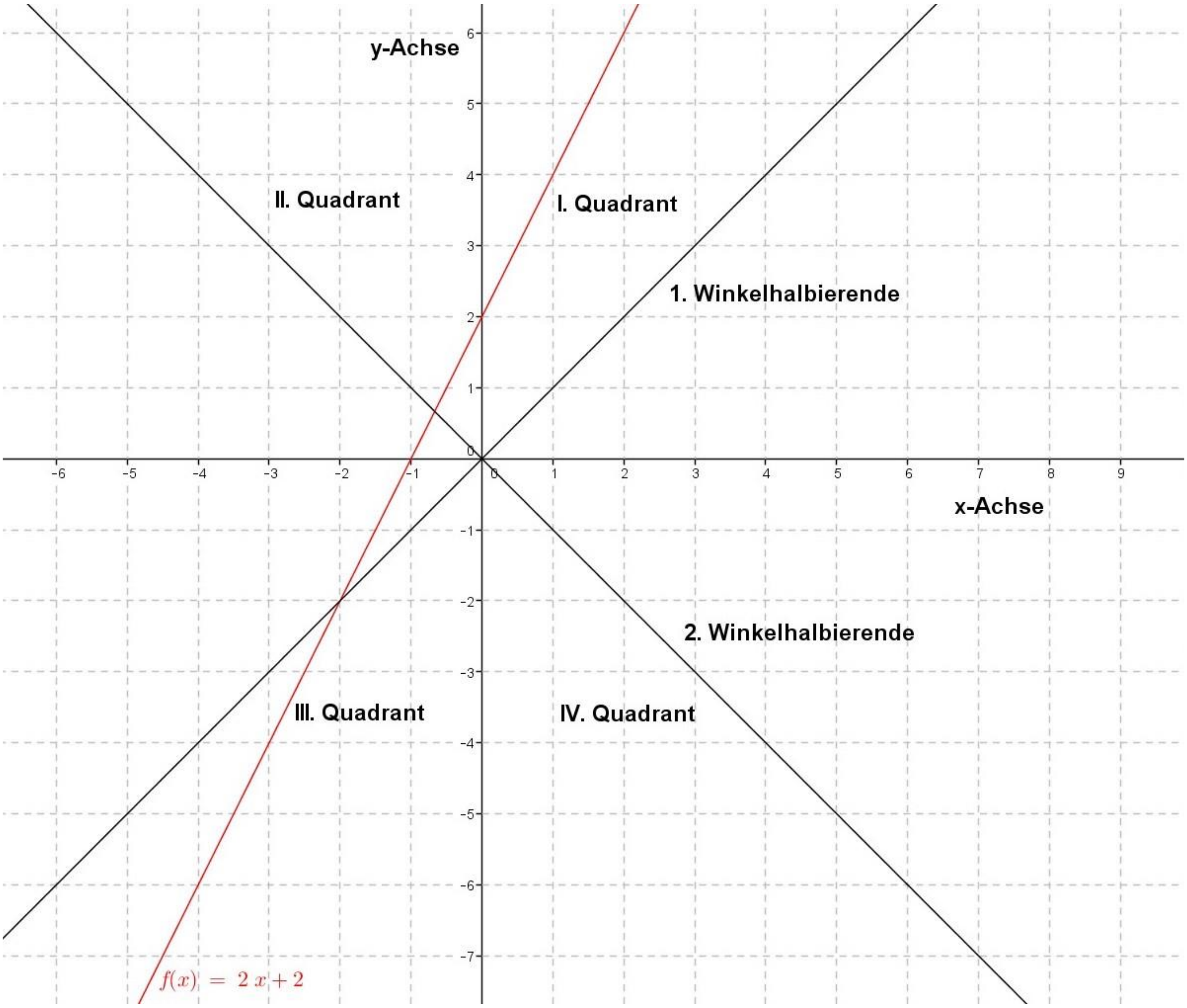
$y = f(x) = 2x + 1$					
x	-2	-1	0	1	2
y = f(x)	-3	-1	1	3	5

Zu jedem Wertepaar (x; y) mit $y = f(x)$ kann ein Punkt P (x **|** y) in ein ebenes Koordinatensystem eingetragen werden (Graph von f). x und y heißen dann Koordinaten des jeweiligen Punktes P.

Der Graph von $y = x$ heißt 1. Winkelhalbierende, der Graph von $y = -x$ heißt zweite Winkelhalbierende.

Die Koordinatenachsen teilen die Ebene in vier Quadranten, die mit römischen Ziffern (I, II, III und IV) abgekürzt werden.

Winkelhalbierenden und Beispielsfunktion: f(x) = y = 2x +2



Lineare-Funktion, Gerade

Hinweis: Im beigefügten Internetlink könnt ihr euch die Hauptform der linearen Funktion auf einem dynamischen Aufgabenblatt genauer anschauen.

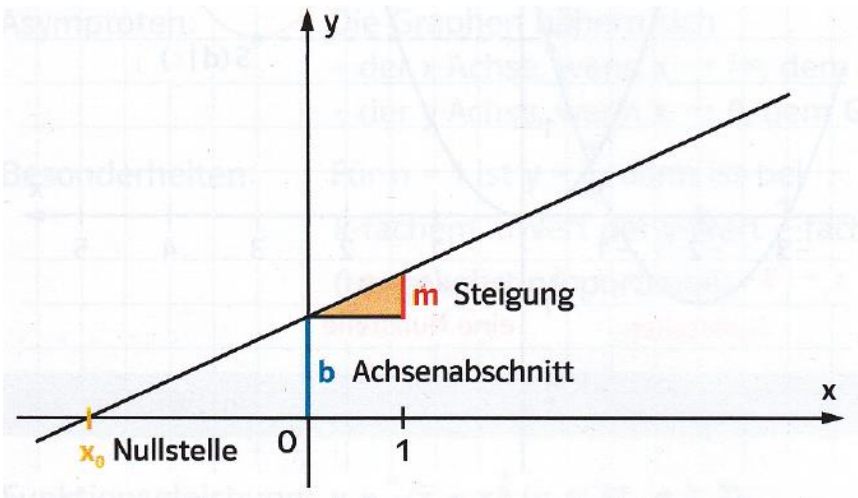
Hauptform

Funktionsgleichung: $\mathbf{y = mx + b}$ oder $\mathbf{f(x) = mx + b}$

m = Steigung der Geraden

b = y-Achsenabschnitt

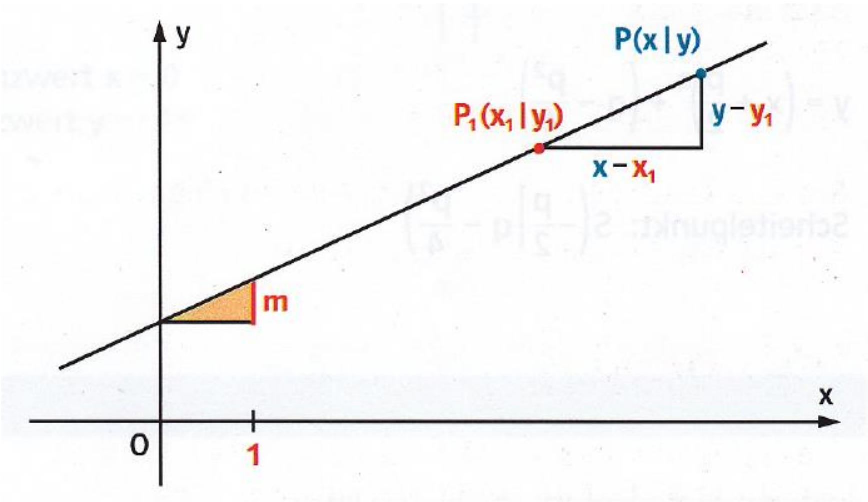
x_0 = Nullstelle



Punkt-Steigungs-Form

Berechnung der Steigung $\mathbf{m} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$

$\mathbf{y = m(x-x_1) + y_1}$



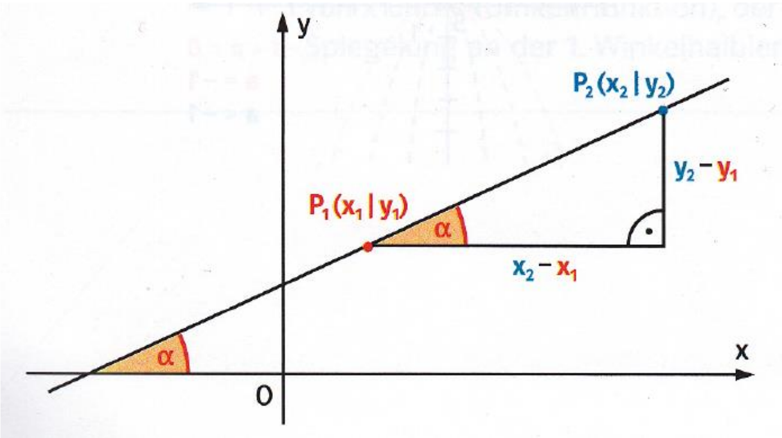
Formelsammlung **Algebra**

Zwei-Punkte-Form

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Steigung

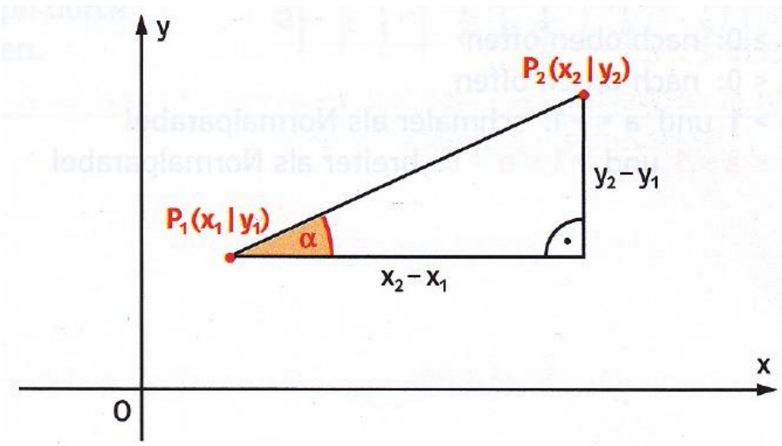
$$M = \tan \alpha = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$



Berechnung im Koordinatensystem

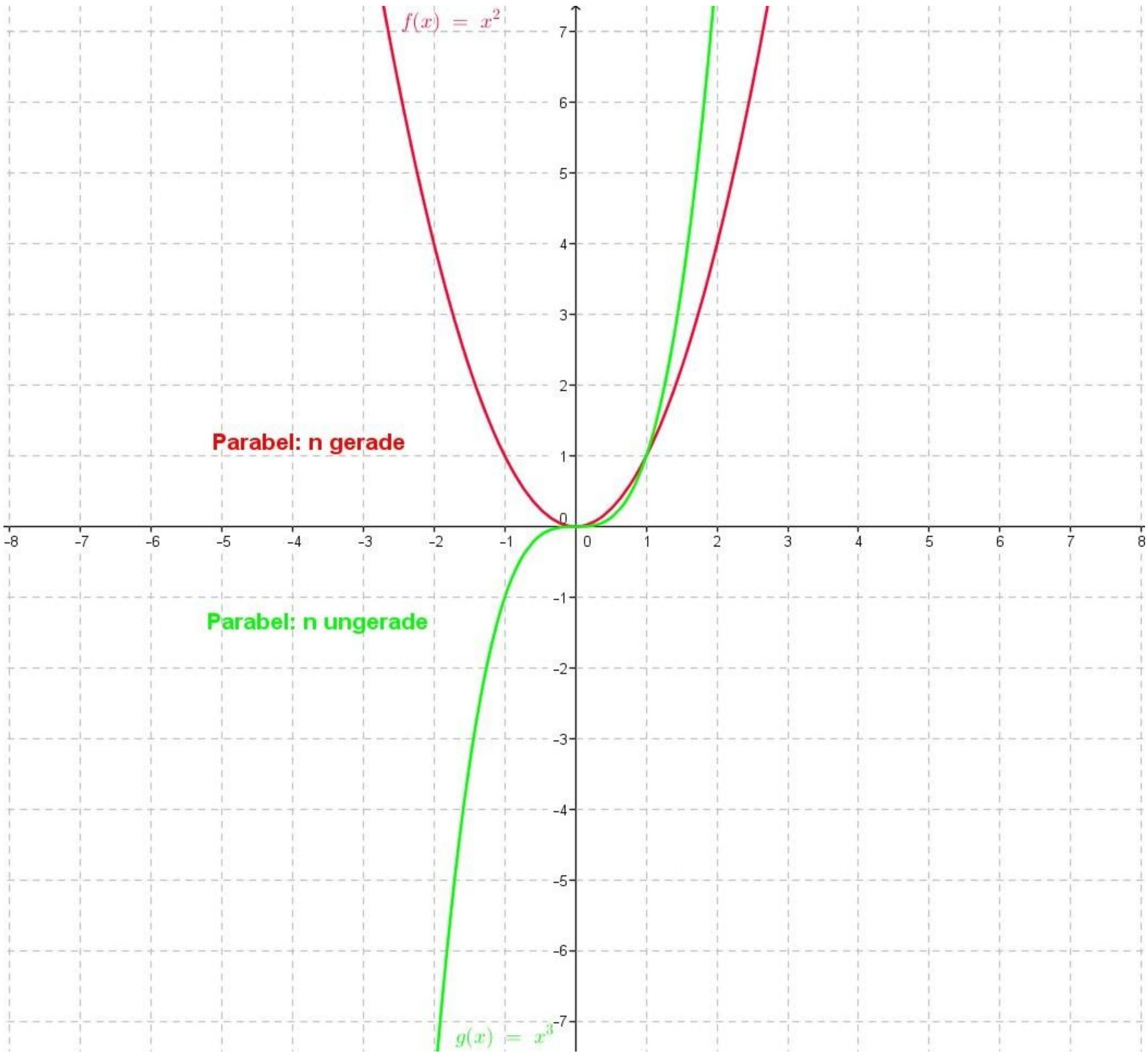
Länge einer Strecke:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$



Potenzfunktion, Parabel und Hyperbel

Funktionsgleichung:	y = x^n (n ∈ ℕ, n > 1)
Definitionsmenge:	ℝ
Wertemenge:	$\mathbb{R}_0^+$, wenn n gerade ist
	ℝ, wenn n ungerade ist
Graphen:	Parabel n-ten Grades
Nullstellen:	x_0 = 0
Symmetrie:	Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn n gerade ist;punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn n ungerade ist.



Formelsammlung **Algebra**

Funktionsgleichung: $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$)

Definitionsmenge: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Wertemenge: $\mathbb{R}^+$, wenn n gerade ist

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$, wenn n ungerade ist

Graphen: Hyperbeln

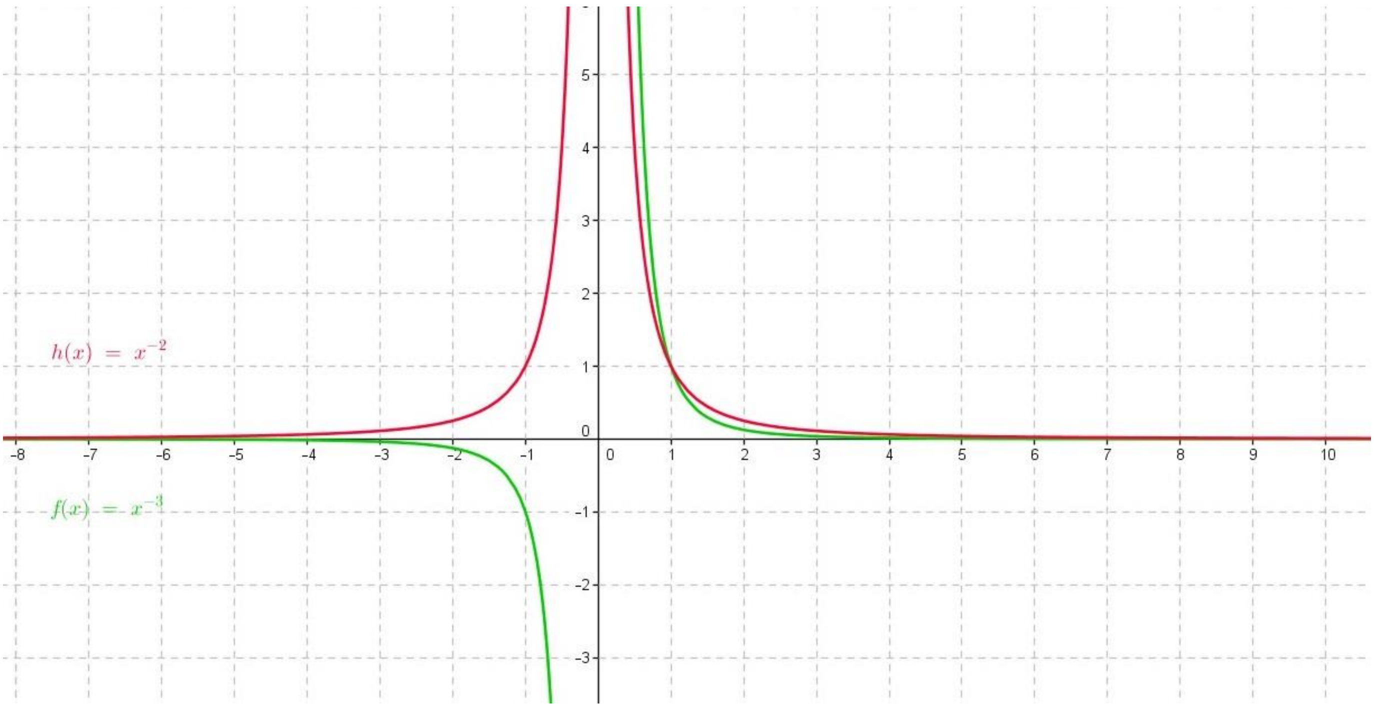
Nullstellen: keine

Symmetrie: Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn n gerade ist; punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn n ungerade ist.

Asymptoten: Die Graphen nähern sich

- Der x-Achse, wenn $x \to \pm\infty$, dem Grenzwert $x = 0$
- Der y-Achse, wenn $x \to 0$, dem Grenzwert $y = \pm\infty$

Besonderheiten: Für $n = 1$ ist $y = \frac{1}{x}$, dann ist bei k-fachem x-Wert der y-Wert $\frac{1}{k}$-fach (umgekehrt proportional).



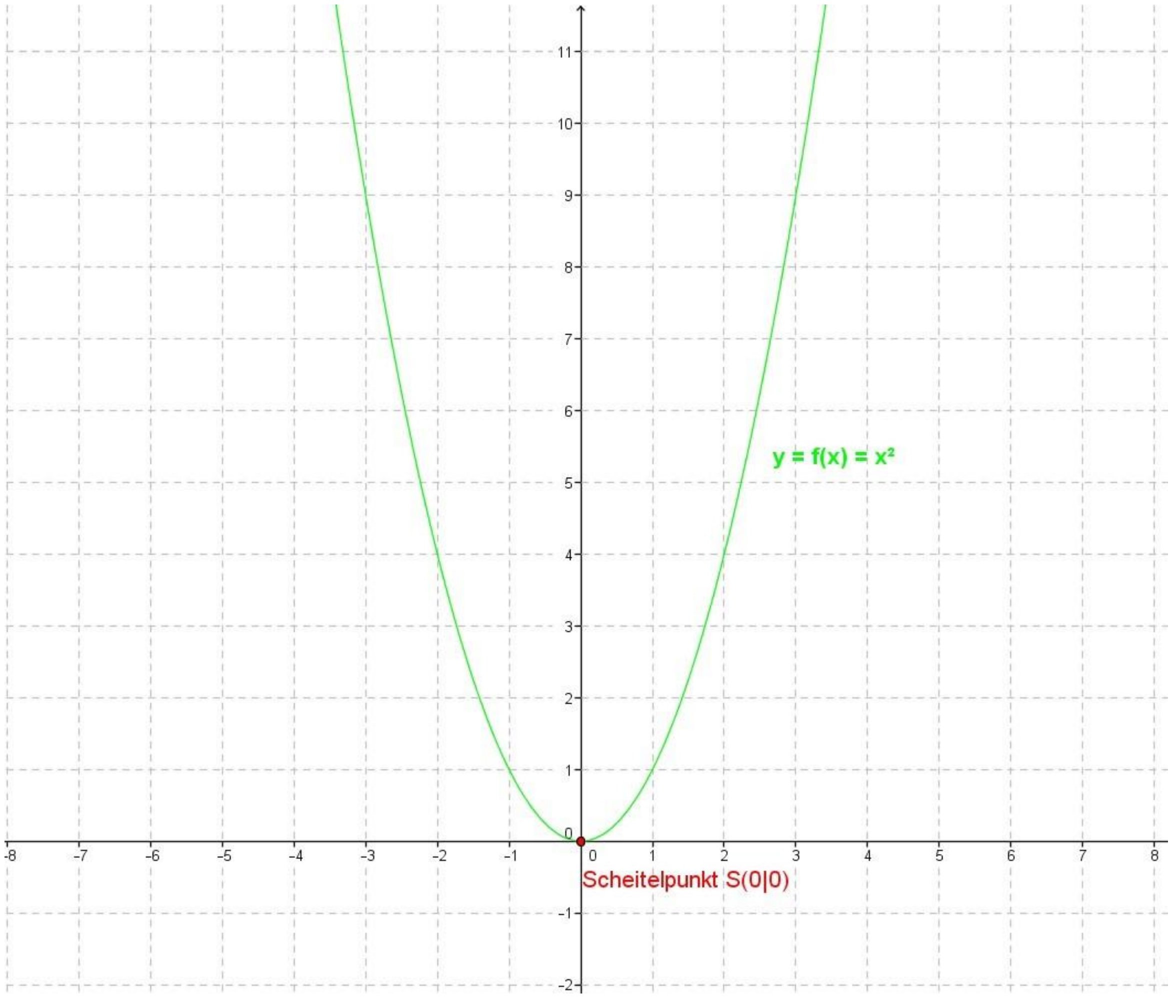
Quadratische Funktion, Parabel

Normalparabel

Funktionsgleichung: $y = x^2$

Scheitelpunkt: S (0/0)

Normalparabeln sind achsensymmetrisch zur Senkrechten durch S.



Verschobene Normalparabeln

Funktionsgleichung (Scheitelform): **$y = (x - d)^2 + c$**

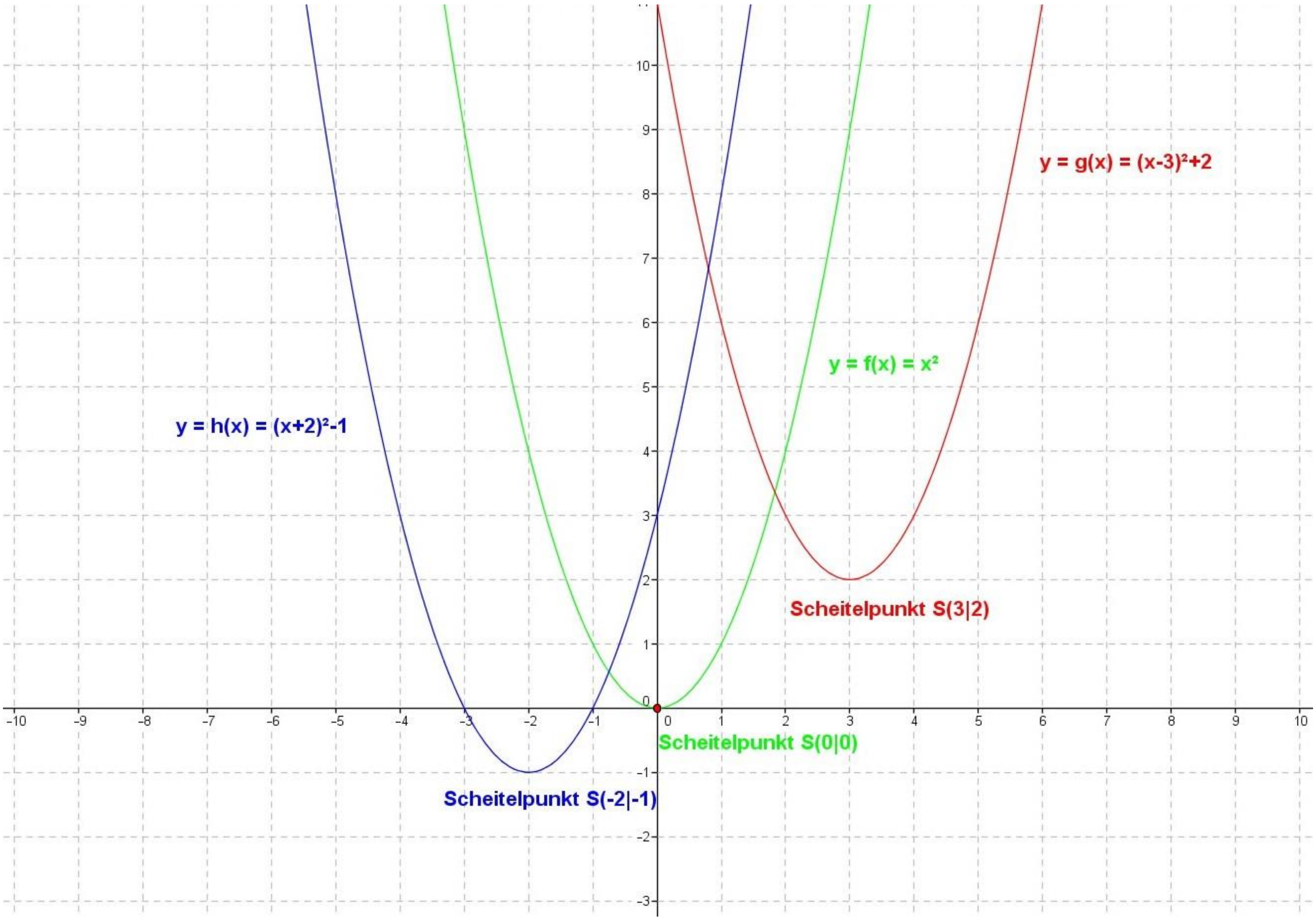
Scheitelpunkt: **S (d | c)**

Nullstellen: **zwei**, **eine** oder **keine** Nullstellen

Die Funktion mit der Normalform $y = x^2 + px + q$ hat die Scheitelform:

$$\mathbf{y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)}$$

Scheitelpunkt: $\mathbf{S\left(-\frac{p}{2} \,|\, q - \frac{p^2}{4}\right)}$



Hinweis: Im beigefügten Internetlink könnt ihr euch die Parabel (**$y = f(x) = x^2 + px + q$**) auf einem dynamischen Aufgabenblatt genauer anschauen.
Dabei habt ihr die Möglichkeit die Variablen p und q zu verändern!

Schmale und breite Parabeln

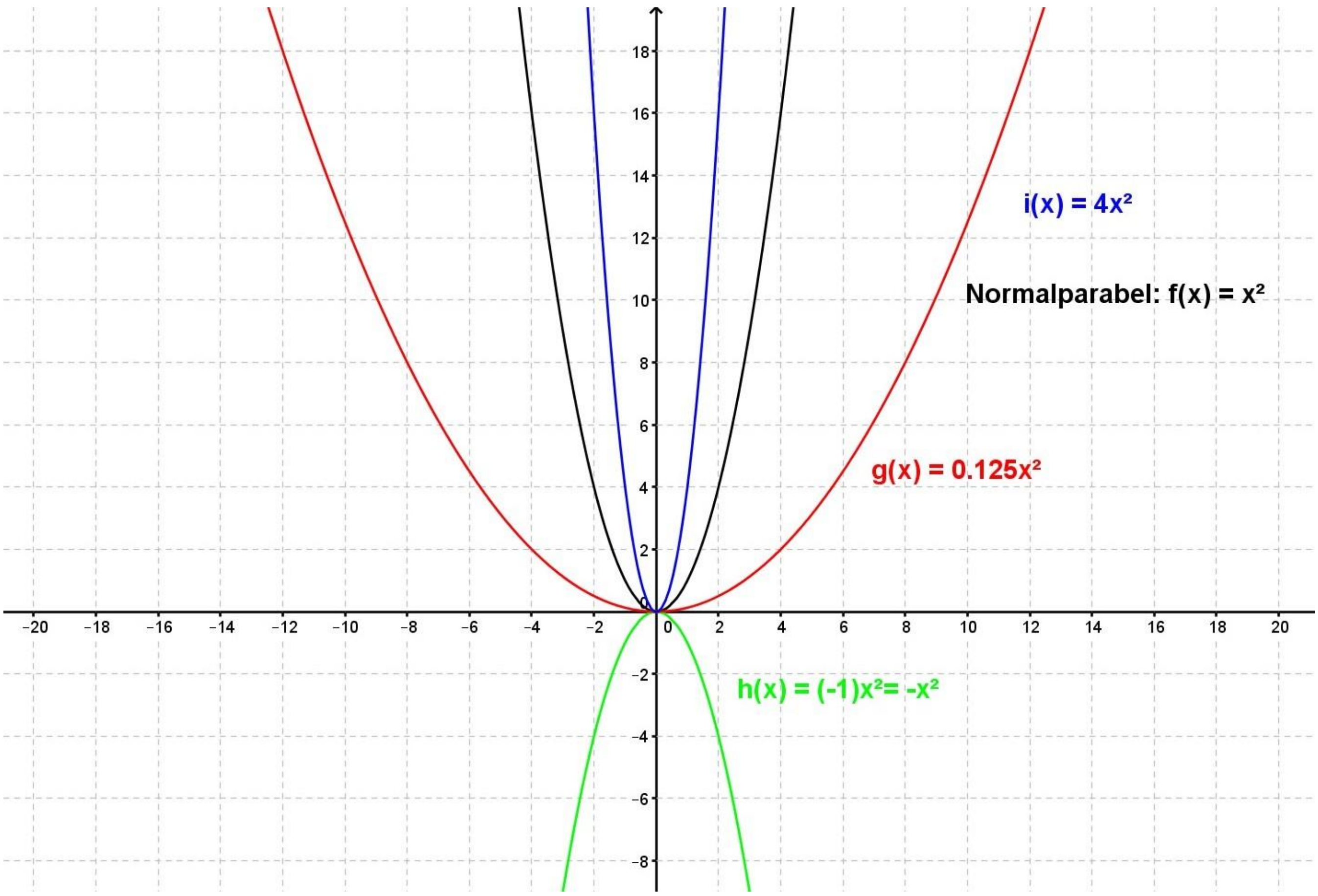
Funktionsgleichung:

$y = ax^2$

Scheitelpunkt: S (0|0)

a bestimmt die Öffnung der Parabel:

- $a > 0$: nach oben offen
- $a < 0$: nach unten offen
- $a > 1$ und $a < -1$: schmaler als Normalparabel
- $0 < a < 1$ und $-1 < a < 0$: breiter als Normalparabel



Quadratische Gleichungen

Normalform	Allgemeine Form
• Dividiert man die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung durch a, dann erhält man die Normalform der quadratischen Gleichung: **$x^2 + px + q = 0$** • Lösungsformel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ • Die Anzahl der Lösungen hängt ab von der **Diskriminante** D mit **$D = \frac{\pi^2}{4} - q$.** Die Gleichung hat für**:** **D = 0** genau **eine** Lösung **($x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$)** **D > 0 zwei** Lösungen, **D < 0 keine** Lösung.	• Jede quadratische Gleichung kann stets in folgender Form dargestellt werden: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ • Man nennt diese Form allgemeine Form einer quadratischen Gleichung. • Lösungsformel: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$ • Die Anzahl der Lösungen hängt ab von der **Diskriminante** D mit **$D = b^2 - 4\,ac$.** Die Gleichung hat für: **D = 0** genau eine Lösung **($x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$)** **D > 0 zwei** Lösungen, **D < 0 keine** Lösung.

Formelsammlung **Algebra**

Satz von Vieta

Für die Lösungen x_1 und x_2 einer quadratischen Gleichung gilt der **Satz von Vieta**:

$$x_1 + x_2 = -p \text{ und } x_1 \cdot x_2 = q \qquad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ und } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Mit den Lösungen ist die Zerlegung in **Linearfaktoren** möglich:

$$x^2 + px + q = 0 \Longleftrightarrow (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

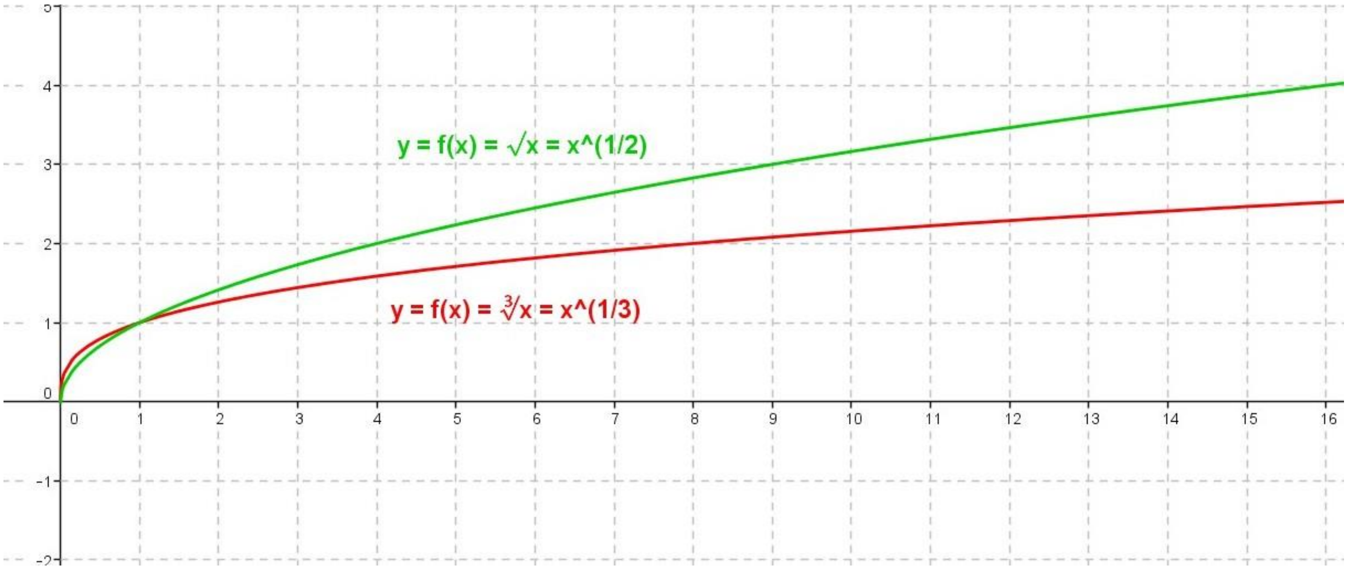
$$ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow a\,(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Wurzelfunktion

Funktionsgleichung:	$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$
Funktionsmenge:	$\mathbb{R}_0^+$
Wertemenge:	$\mathbb{R}_0^+$
Graphen:	Wurzel n-ten Grades
Nullstellen:	N (0|0)

Besonderheiten:

- (1|1) liegt auf dem Graphen für jedes n.
- Senkrechter Graph bei (0|0).
- y= $x^{\frac{1}{n}}$ entsteht aus y = x^n durch Vertauschen von x und y (Umkehrfunktion), der Graph durch Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden.


y = f(x) = √x = x^(1/2)
y = f(x) = ∛x = x^(1/3)