

Л. Б. Коралов, Я. Г. Синай

Теория вероятностей и случайные процессы

МЦНМО

Л. Б. Коралов, Я. Г. Синай

Теория вероятностей и случайные процессы

Перевод с английского
Э. В. Переходцевой

Под редакцией
Б. М. Гуревича

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2014

УДК 519.21(075.8)

ББК 22.171

К66

Коралов Л. Б., Синай Я. Г.

Теория вероятностей и случайные процессы

Пер. с английского

Электронное издание

М.: МЦНМО, 2014

408 с.

ISBN 978-5-4439-2073-3

В основу книги положены курсы лекций, читавшихся авторами в американских университетах. Изложение теории вероятностей (главы 1—11) начинается с нулевого уровня и доходит до продвинутых разделов, иногда включаемых в курсы для студентов, специализирующихся в этой области.

Для понимания второй части книги (случайные процессы — главы 12—22) требуется владение первой частью и несколько более высокая математическая культура — в главах, использующих сведения из функционального анализа и дифференциальных уравнений. Большинство глав заканчивается списком задач.

Издание предназначено для студентов физико-математических специальностей университетов и всех изучающих и применяющих теорию вероятностей.

Подготовлено на основе книги: *Коралов Л. Б., Синай Я. Г.* Теория вероятностей и случайные процессы / Пер. с англ. Э. В. Переходцевой; под ред. Б. М. Гуревича. — М.: МЦНМО, 2013. — 408 с.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241-74-83.
<http://www.mccme.ru>

ISBN 978-5-4439-2073-3

© Л. Б. Коралов, Я. Г. Синай, 2013.

© МЦНМО, 2014.

Оглавление

Предисловие к русскому изданию	7
Предисловие	8

Часть I

Теория вероятностей

Глава 1. Случайные величины и их распределения

§ 1.1. Пространство элементарных исходов, σ -алгебры и меры	11
§ 1.2. Математическое ожидание и дисперсия случайных величин на дискретном вероятностном пространстве	18
§ 1.3. Вероятность объединения событий	23
§ 1.4. Эквивалентные определения σ -аддитивности, борелевских σ -алгебр и измеримости	26
§ 1.5. Функции распределения и плотности	30
§ 1.6. Задачи	33

Глава 2. Последовательности независимых испытаний

§ 2.1. Закон больших чисел и его приложения	36
§ 2.2. Предельная теорема Муавра—Лапласа и ее приложения	44
§ 2.3. Предельная теорема Пуассона	47
§ 2.4. Задачи	48

Глава 3. Интеграл Лебега и математическое ожидание

§ 3.1. Определение интеграла Лебега	50
§ 3.2. Индуцированные меры и функции распределения	55
§ 3.3. Типы мер и функций распределения	59
§ 3.4. Замечания о построении меры Лебега	62
§ 3.5. Сходимость функций и интегралов. Теорема Фубини	64
§ 3.6. Знакопеременные меры и теорема Радона—Никодима	69
§ 3.7. Пространства L^p	70
§ 3.8. Метод Монте-Карло	72
§ 3.9. Задачи	74

Глава 4. Условные вероятности и независимость

§ 4.1. Условные вероятности	76
§ 4.2. Независимость событий, σ -алгебр и случайных величин	77
§ 4.3. π -системы и независимость	79
§ 4.4. Задачи	81

Глава 5. Цепи Маркова с конечным числом состояний

§ 5.1. Стохастические матрицы	84
---	----

§ 5.2. Цепи Маркова	85
§ 5.3. Эргодические и неэргодические цепи Маркова	89
§ 5.4. Закон больших чисел и энтропия цепи Маркова	92
§ 5.5. Произведения положительных матриц	94
§ 5.6. Общие цепи Маркова и условие Дёблина	97
§ 5.7. Задачи	102
Глава 6. Случайные блуждания на решетке $\mathbb{Z}^d$	
§ 6.1. Возвратные и невозвратные случайные блуждания	105
§ 6.2. Случайное блуждание на $\mathbb{Z}$ и принцип отражения	109
§ 6.3. Закон арксинуса	111
§ 6.4. Задача о разорении игрока	115
§ 6.5. Задачи	121
Глава 7. Закон больших чисел	
§ 7.1. Определения, леммы Бореля—Кантелли и неравенство Колмогорова	123
§ 7.2. Теоремы Колмогорова об усиленном законе больших чисел	126
§ 7.3. Задачи	129
Глава 8. Слабая сходимости мер	
§ 8.1. Определение слабой сходимости	131
§ 8.2. Слабая сходимости и функции распределения	133
§ 8.3. Слабая компактность и плотность. Теорема Прохорова	136
§ 8.4. Задачи	139
Глава 9. Характеристические функции	
§ 9.1. Определение и основные свойства	142
§ 9.2. Характеристические функции и слабая сходимости	147
§ 9.3. Гауссовские случайные векторы	150
§ 9.4. Задачи	153
Глава 10. Предельные теоремы	
§ 10.1. Центральная предельная теорема. Условие Линдеберга	156
§ 10.2. Локальная предельная теорема	160
§ 10.3. Центральная предельная теорема и теория ренормгруппы	165
§ 10.4. Вероятности больших отклонений	170
§ 10.5. Другие предельные теоремы	175
§ 10.6. Задачи	180
Глава 11. Несколько интересных вероятностных задач	
§ 11.1. Полуциркулярный закон Вигнера для симметрических случайных матриц	183
§ 11.2. Произведения случайных матриц	187
§ 11.3. Статистика выпуклых ломаных	191

Часть II

Случайные процессы и случайные поля

Глава 12. Основные понятия

§ 12.1. Определение случайного процесса и случайного поля	199
§ 12.2. Теорема Колмогорова о согласованных конечномерных распределениях	202
§ 12.3. Процесс Пуассона	206
§ 12.4. Задачи	207

Глава 13. Условные математические ожидания и мартингалы

§ 13.1. Условные математические ожидания	210
§ 13.2. Свойства условных математических ожиданий	211
§ 13.3. Регулярные условные вероятности	214
§ 13.4. Фильтрации, моменты остановки и мартингалы	217
§ 13.5. Мартингалы с дискретным временем	221
§ 13.6. Мартингалы с непрерывным временем	224
§ 13.7. Сходимость мартингалов	227
§ 13.8. Задачи	231

Глава 14. Марковские процессы с конечным пространством состояний

§ 14.1. Определение марковского процесса	234
§ 14.2. Инфинитезимальная матрица	235
§ 14.3. Прямая конструкция марковского процесса	237
§ 14.4. Задача из теории массового обслуживания	240
§ 14.5. Задачи	241

Глава 15. Стационарные в широком смысле случайные процессы

§ 15.1. Гильбертово пространство, порожденное стационарным процессом	243
§ 15.2. Закон больших чисел для стационарного случайного процесса	245
§ 15.3. Теорема Бохнера и другие полезные результаты	247
§ 15.4. Спектральное представление стационарного случайного процесса	249
§ 15.5. Ортогональные случайные меры	251
§ 15.6. Линейный прогноз стационарных случайных процессов	254
§ 15.7. Стационарные случайные процессы с непрерывным временем	262
§ 15.8. Задачи	265

Глава 16. Стационарные в узком смысле процессы

§ 16.1. Стационарные процессы и сохраняющие меру преобразования	267
§ 16.2. Эргодическая теорема Биркгофа—Хинчина	269
§ 16.3. Эргодичность, перемешивание и регулярность	273
§ 16.4. Стационарные процессы с непрерывным временем	278
§ 16.5. Задачи	280

Глава 17. Обобщенные случайные процессы

§ 17.1. Обобщенные функции и обобщенные случайные процессы . . .	282
§ 17.2. Гауссовские процессы и белый шум	287

Глава 18. Броуновское движение

§ 18.1. Определение броуновского движения	291
§ 18.2. Пространство $C([0, \infty))$	294
§ 18.3. Существование меры Винера, теорема Донскера	300
§ 18.4. Теорема Колмогорова	305
§ 18.5. Некоторые свойства броуновского движения	309
§ 18.6. Задачи	313

Глава 19. Марковские процессы и марковские семейства

§ 19.1. Распределение максимума броуновского движения	315
§ 19.2. Определение марковского свойства	316
§ 19.3. Марковское свойство броуновского движения	321
§ 19.4. Пополненная фильтрация	322
§ 19.5. Определение строго марковского свойства	324
§ 19.6. Строго марковское свойство броуновского движения	327
§ 19.7. Задачи	332

Глава 20. Стохастический интеграл и формула Ито

§ 20.1. Квадратическая вариация квадратично интегрируемого мар- тингала	333
§ 20.2. Пространство подынтегральных функций для стохастического интеграла Ито	338
§ 20.3. Простые процессы	340
§ 20.4. Определение и основные свойства стохастического интеграла	342
§ 20.5. Дальнейшие свойства стохастического интеграла	345
§ 20.6. Локальные мартингалы	347
§ 20.7. Формула Ито	351
§ 20.8. Задачи	357

Глава 21. Стохастические дифференциальные уравнения

§ 21.1. Существование сильных решений стохастических дифферен- циальных уравнений	358
§ 21.2. Задача Дирихле для уравнения Лапласа	366
§ 21.3. Стохастические дифференциальные уравнения и УрЧП	371
§ 21.4. Марковское свойство решений СДУ	382
§ 21.5. Задача гомогенизации	386
§ 21.6. Задачи	390

Глава 22. Гиббсовские случайные поля

§ 22.1. Определение гиббсовского случайного поля	393
§ 22.2. Пример фазового перехода	397
Предметный указатель	401

Предисловие к русскому изданию

При переводе книги мы старались по возможности сохранить авторскую терминологию, указав в подстрочных примечаниях соответствие между нею и терминологией, принятой в русской математической литературе. В отдельных случаях мы все-таки использовали последнюю, также оговорив это в примечаниях. Менее существенные изменения, по большей части связанные с устранением мелких погрешностей оригинала, как правило, не оговариваются.

В процессе работы над переводом авторы оказывали переводчику и редактору многообразную помощь: они прислали файл с текстом английского варианта книги, а впоследствии — список исправлений, которые были внесены в этот текст; Я. Г. Синай просмотрел значительную часть перевода и сделал многочисленные замечания; с Л. Б. Кораловым редактор неоднократно обсуждал небольшие отклонения от оригинала, по большей части терминологического характера, которые, по его мнению, следовало внести в русский текст. За все это мы чрезвычайно признательны обоим авторам.

Б. М. Гуревич

Предисловие

Основой этой книги послужил годовой курс, много лет читавшийся в Принстонском университете для студентов старших курсов и аспирантов. В течение последних лет аналогичный курс читался и в Мэрилендском университете.

Мы хотели бы выразить благодарность Софи Лукас и профессору Рафаэлю Херрера, прочитавшим рукопись и внесшим много исправлений. В особенности мы благодарны профессору Б. М. Гуревичу за множество важных предложений, касавшихся как математического содержания книги, так и ее стиля.

Работа Л. Б. Коралова над этой книгой была поддержана грантом Национального научного фонда DMS-0405152, работа Я. Г. Сина — грантом Национального научного фонда DMS-0600996.

Часть I

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Глава 1

Случайные величины и их распределения

§ 1.1. Пространство элементарных исходов, σ -алгебры и меры

Пространство элементарных исходов — первый объект, с которым мы встречаемся в теории вероятностей. Это некоторое непустое множество, обычно обозначаемое Ω , элементы которого $\omega \in \Omega$ называются элементарными исходами.

Приведем несколько простых примеров.

Пример. Рассмотрим конечное множество $X = \{x^1, \dots, x^r\}$ и множество Ω , состоящее из последовательностей $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ длины $n \geq 1$, где $\omega_i \in X$ для каждого i , $1 \leq i \leq n$. В приложениях ω является результатом n статистических экспериментов, а ω_i — результатом i -го эксперимента. Ясно, что $|\Omega| = r^n$, где $|\Omega|$ обозначает число элементов в конечном множестве. Если $X = \{0, 1\}$, то каждое ω является последовательностью нулей и единиц длины n . Такое пространство Ω может служить моделью для результатов n последовательных бросаний монеты. Если $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, то Ω можно рассматривать как пространство исходов для n подбрасываний игральной кости.

Пример. Обобщение предыдущего примера можно получить следующим образом. Пусть X — конечное или счетное множество, а I — конечное множество. Тогда $\Omega = X^I$ — пространство всех функций на I со значениями в X .

Если $X = \{0, 1\}$ и $I \subset \mathbb{Z}^d$ — конечное множество, то каждое $\omega \in \Omega$ представляет собой конфигурацию нулей и единиц на ограниченном подмножестве d -мерной решетки. Такие пространства появляются в статистической физике, теории перколяции и т. д.

Пример. Рассмотрим лотерею, в которой имеется r различных чисел и надо угадать n из них вместе с порядком их появления (при $n \leq r$). Чтобы построить модель этой игры, положим $X = \{1, \dots, r\}$. Тогда Ω будет состоять из таких последовательностей $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ длины n , что $\omega_i \in X$ и $\omega_i \neq \omega_j$ при $i \neq j$. Легко показать, что $|\Omega| = r!/(r-n)!$.

Позднее в этом параграфе мы определим понятие вероятностной меры, или просто вероятности. Это функция, которая приписывает некоторым (но не обязательно всем) подмножествам $A \subseteq \Omega$ действительные числа между нулем и единицей.

Если интерпретировать Ω как пространство возможных исходов эксперимента, то вероятность множества A можно понимать как степень правдоподобия того, что исход эксперимента принадлежит A . Перед введением понятия вероятности необходимо обсудить те классы множеств, на которых она будет определена.

Определение 1.1. Совокупность $\mathcal{G}$ подмножеств множества Ω называется алгеброй, если выполняются следующие три условия:

- 1) $\Omega \in \mathcal{G}$;
- 2) из $C \in \mathcal{G}$ вытекает, что $\Omega \setminus C \in \mathcal{G}$;
- 3) из $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{G}$ вытекает, что $\bigcup_{i=1}^n C_i \in \mathcal{G}$.

Пример. Пусть задано множество элементарных исходов Ω , и пусть $\underline{\mathcal{G}}$ содержит лишь два элемента: пустое множество и всё Ω , т. е. $\underline{\mathcal{G}} = \{\emptyset, \Omega\}$. Определим $\bar{\mathcal{G}}$ как совокупность всех подмножеств множества Ω . Ясно, что $\underline{\mathcal{G}}$ и $\bar{\mathcal{G}}$ удовлетворяют определению алгебры. Покажем, что если Ω конечно, то алгебра $\bar{\mathcal{G}}$ содержит $2^{|\Omega|}$ элементов.

Для всякого $C \subseteq \Omega$ введем функцию $\chi_C(\omega)$ на Ω с помощью равенства

$$\chi_C(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in C, \\ 0, & \text{если } \omega \notin C. \end{cases}$$

Эта функция называется индикатором множества C . Ясно, что каждая функция на Ω , принимающая значения 0 и 1, является индикатором некоторого множества и определяет это множество однозначно. А именно, множество состоит из тех ω , где функция равна 1. Число различных функций, отображающих Ω в множество $\{0, 1\}$, равно $2^{|\Omega|}$.

Лемма 1.2. Пусть Ω — пространство элементарных исходов и $\mathcal{G}$ — алгебра. Тогда

- 1) пустое множество является элементом $\mathcal{G}$;
- 2) из $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{G}$ следует, что $\bigcap_{i=1}^n C_i \in \mathcal{G}$;
- 3) из $C_1, C_2 \in \mathcal{G}$ следует, что $C_1 \setminus C_2 \in \mathcal{G}$.

Доказательство. Взяв $C = \Omega \in \mathcal{G}$, с помощью второго свойства из определения 1.1 получим $\emptyset \in \mathcal{G}$. Чтобы доказать утверждение 2,

заметим, что

$$\Omega \setminus \bigcap_{i=1}^n C_i = \bigcup_{i=1}^n (\Omega \setminus C_i) \in \mathcal{G}.$$

Следовательно, $\bigcap_{i=1}^n C_i \in \mathcal{G}$. Для доказательства третьего утверждения запишем

$$C_1 \setminus C_2 = \Omega \setminus ((\Omega \setminus C_1) \cup C_2) \in \mathcal{G}. \quad \square$$

Лемма 1.3. Если алгебра $\mathcal{G}$ конечна, то существуют такие непустые множества $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{G}$, что

1) $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$;

2) $\Omega = \bigcup_{i=1}^m B_i$;

3) для каждого множества $C \in \mathcal{G}$ существует такое множество $I \subseteq \{1, \dots, m\}$, что $C = \bigcup_{i \in I} B_i$ (условимся, что $C = \emptyset$ при $I = \emptyset$).

Замечание 1.4. Совокупность множеств B_i , $i = 1, \dots, m$, определяет некоторое разбиение множества Ω .

Таким образом, конечные алгебры порождаются конечными разбиениями.

Замечание 1.5. Для всякой конечной алгебры $\mathcal{G}$ найдется такое число $m \in \mathbb{N}$, что $\mathcal{G}$ содержит 2^m элементов. Действительно, по лемме 1.3 существует взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{G}$ и совокупностью подмножеств множества $\{1, \dots, m\}$.

Доказательство леммы 1.3. Занулируем произвольным образом элементы алгебры $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G} = \{C_1, \dots, C_s\}.$$

Для любого множества $C \in \mathcal{G}$ положим

$$C^1 = C, \quad C^{-1} = \Omega \setminus C.$$

Рассмотрим последовательность $b = (b_1, \dots, b_s)$, в которой каждый элемент b_i равен либо $+1$, либо -1 , и образуем множество

$$B^b = \bigcap_{i=1}^s C_i^{b_i}.$$

Из определения алгебры и леммы 1.2 вытекает, что $B^b \in \mathcal{G}$. Кроме того, так как

$$C_i = \bigcup_{b: b_i=1} B^b,$$

всякий элемент C_i алгебры $\mathcal{G}$ можно получить как объединение некоторых множеств B^b . Если $b' \neq b''$, то $B^{b'} \cap B^{b''} = \emptyset$.

Действительно, условие $b' \neq b''$ означает, что найдется i , для которого $b'_i \neq b''_i$, скажем, $b'_i = 1$, $b''_i = -1$. В выражении для $B^{b'}$ мы имеем $C_i^1 = C_i$, и, значит, $B^{b'} \subseteq C_i$. В выражение для $B^{b''}$ входит $C_i^{-1} = \Omega \setminus C_i$, так что $B^{b''} \subseteq \Omega \setminus C_i$. Следовательно, все B^b попарно не пересекаются. Теперь в качестве B_i можно взять непустые множества B^b . $\square$

Определение 1.6. Совокупность $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется σ -алгеброй, если $\mathcal{F}$ является алгеброй, которая замкнута относительно счетных объединений, т. е. из того, что $C_i \in \mathcal{F}$, $i \geq 1$, вытекает, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathcal{F}$. Элементы σ -алгебры $\mathcal{F}$ называются измеримыми множествами или событиями.

Как и выше, простейшими примерами σ -алгебр служат тривиальная σ -алгебра $\underline{\mathcal{F}} = \{\emptyset, \Omega\}$ и σ -алгебра $\bar{\mathcal{F}}$, состоящая из всех подмножеств пространства Ω .

Определение 1.7. Измеримым пространством называется пара $(\Omega, \mathcal{F})$, где Ω — пространство элементарных исходов, а $\mathcal{F}$ — некоторая σ -алгебра подмножеств Ω .

Замечание 1.8. Пространство элементарных исходов называется дискретным, если оно содержит конечное или счетное число элементов. Всякий раз, рассматривая измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$ с дискретным пространством Ω , мы будем предполагать, что $\mathcal{F}$ состоит из всех подмножеств пространства Ω .

Следующую лемму можно доказать так же, как лемму 1.2.

Лемма 1.9. Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство. Тогда из того, что $C_i \in \mathcal{F}$, $i \geq 1$, вытекает, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathcal{F}$.

Может показаться, что разница между понятиями алгебры и σ -алгебры незначительна. Однако такое впечатление обманчиво. Как мы увидим позже, любая содержательная теория (такая, как теория меры или теория вероятностей) основывается на понятии σ -алгебры.

Определение 1.10. Пусть дано измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$. Функция $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется $\mathcal{F}$ -измеримой (или просто измеримой), если для любых a и b , $a < b$, выполняется включение

$$\{\omega: a \leq \xi(\omega) < b\} \in \mathcal{F}.$$

Ниже будет показано, что линейная комбинация и произведение измеримых функций также являются измеримыми функциями.

Если пространство Ω дискретно, то всякая действительная функция на Ω измерима, так как $\mathcal{F}$ содержит все подмножества Ω .

Чтобы лучше понять определение измеримости, рассмотрим случай, когда σ -алгебра $\mathcal{F}$ конечна. Из леммы 1.3 вытекает, что $\mathcal{F}$ соответствует конечному разбиению пространства Ω на подмножества $B_1, \dots, B_m$ и каждое $C \in \mathcal{F}$ — это объединение некоторых B_i .

Теорема 1.11. *Если функция ξ является $\mathcal{F}$ -измеримой, то на каждом B_i , $1 \leq i \leq m$, она принимает постоянное значение.*

Доказательство. Предположим, что на некотором множестве B_j , $1 \leq j \leq m$, функция ξ принимает по меньшей мере два значения a и b ($a < b$). Тогда множество $\{\omega : a \leq \xi(\omega) < (a+b)/2\}$ должно содержать хотя бы одну точку из B_j , но не должно содержать всего B_j . Поэтому его нельзя представить как объединение некоторых из B_i , что противоречит его измеримости. $\square$

Определение 1.12. Пусть дано измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$. Функция $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$ называется *конечной неотрицательной мерой*, если

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i)$$

всякий раз, когда $C_i \in \mathcal{F}$ при $i \geq 1$ и $C_i \cap C_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Свойство, выраженное в определении 1.12, называется *счетной аддитивностью* (или σ -аддитивностью) меры μ .

Замечание 1.13. Мы часто будем опускать слова «конечная» и «неотрицательная» и называть μ просто мерой. Таким образом, мера — это σ -аддитивная функция на $\mathcal{F}$ со значениями в $\mathbb{R}^+$. В отличие от сказанного выше σ -конечная и знакопеременная меры, вводимые в гл. 3, принимают соответственно значения в $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ и в $\mathbb{R}$.

Определение 1.14. Пусть g — бинарная функция на Ω со значениями 1 (истина) и 0 (ложь). Говорят, что функция g *почти всюду истинна*, если существует такое событие C , что $\mu(C) = \mu(\Omega)$ и $g(\omega) = 1$ для всех $\omega \in C$.

Определение 1.15. Мера P на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ называется *вероятностной мерой* или *распределением вероятностей*, если $P(\Omega) = 1$.

Определение 1.16. *Вероятностным пространством* называется тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство и P — вероятностная мера. Если $C \in \mathcal{F}$, то число $P(C)$ называется *вероятностью события* C .

Определение 1.17. Измеримая функция, определенная на вероятностном пространстве, называется *случайной величиной*.

Замечание 1.18. Если P — вероятностная мера, то вместо термина «почти всюду» часто используется «почти наверное».

Замечание 1.19. Заменим условие σ -аддитивности в определении 1.12 на следующее: если $C_i \in \mathcal{F}$ при $1 \leq i \leq n$, где n конечное, и $C_i \cup C_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n C_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(C_i).$$

Это условие приводит вместо понятия меры к понятию конечно-аддитивной функции. Заметим, что из конечной аддитивности вытекает супераддитивность для бесконечных последовательностей множеств. А именно,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i),$$

если множества C_i не пересекаются. Действительно, в противном случае мы могли бы найти настолько большое n , что

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) < \sum_{i=1}^n \mu(C_i),$$

но это неравенство противоречит конечной аддитивности.

Пусть Ω дискретно. Тогда $p(\omega) = P(\{\omega\})$ — вероятность элементарного исхода ω . Из определения вероятностной меры следует, что

- 1) $p(\omega) \geq 0$;
- 2) $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.

Лемма 1.20. Каждая функция $p(\omega)$, заданная на дискретном пространстве Ω и удовлетворяющая этим двум условиям, порождает вероятностную меру на σ -алгебре всех подмножеств Ω , задаваемую формулой

$$P(C) = \sum_{\omega \in C} p(\omega).$$

Доказательство. Ясно, что $P(C) \geq 0$ для всех C и что $P(\Omega) = 1$. Чтобы проверить выполнение условия σ -аддитивности из определения 1.12, нужно показать, что для попарно непересекающихся множеств C_i , $i \geq 1$, выполняется соотношение

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i).$$

Так как сумма сходящегося ряда с положительными членами не зависит от порядка суммирования, получаем

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{\omega \in \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i} p(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega \in C_i} p(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i). \quad \square$$

Таким образом, мы показали, что в случае дискретного вероятностного пространства Ω существует взаимно однозначное соответствие между распределениями вероятностей на Ω и функциями p со свойствами, сформулированными перед леммой 1.20.

Замечание 1.21. Если Ω не является дискретным, то обычно невозможно выразить меру заданного множества в терминах мер элементарных исходов. Например, в случае лебеговой меры на $[0, 1]$ (изучаемой в гл. 3) $P(\{\omega\}) = 0$ для каждого ω .

Приведем несколько примеров вероятностных распределений на дискретном множестве Ω .

1. *Равномерное распределение:* Ω конечное и $p(\omega) = 1/|\Omega|$. В этом случае все ω имеют равные вероятности. Вероятность всякого события C равна $P(C) = |C|/|\Omega|$.

2. *Геометрическое распределение:* $\Omega = \mathbb{Z}^+ = \{n: n \geq 0, n \text{ целое}\}$ и $p(n) = (1 - q)q^n$, $0 < q < 1$. Такое распределение называется геометрическим с параметром q .

3. *Распределение Пуассона:* пространство Ω то же самое, что в предыдущем примере, и $p(n) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^n / n!$, $\lambda > 0$. Это распределение называется распределением Пуассона с параметром λ .

Пусть ξ — случайная величина, определенная на дискретном вероятностном пространстве и принимающая значения в конечном или счетном множестве X , т. е. $\xi(\omega) \in X$ при всех $\omega \in \Omega$.

Рассмотрим события $C_x = \{\omega: \xi(\omega) = x\}$, $x \in X$. Ясно, что при $x \neq y$ пересечение событий C_x и C_y — пустое множество и что

$$\bigcup_{x \in X} C_x = \Omega.$$

Теперь мы можем определить распределение вероятностей на X , положив $p_{\xi}(x) = P(C_x)$.

Определение 1.22. Распределение вероятностей на X , определенное формулой $p_{\xi}(x) = P(C_x)$, называется *распределением случайной величины ξ* (или *распределением вероятностей, индуцированным случайной величиной ξ*).

§ 1.2. Математическое ожидание и дисперсия случайных величин на дискретном вероятностном пространстве

Пусть ξ — случайная величина на дискретном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $\mathcal{F}$ — совокупность всех подмножеств пространства Ω , а P — вероятностная мера. Как и ранее, положим $p(\omega) = P(\{\omega\})$.

Пусть $X = \xi(\Omega) \subset \mathbb{R}$ — множество значений случайной величины ξ . Так как Ω дискретно, X конечно или счетно.

Пусть

$$\xi_+(\omega) = \begin{cases} \xi(\omega), & \text{если } \xi(\omega) \geq 0, \\ 0, & \text{если } \xi(\omega) < 0, \end{cases}$$

$$\xi_-(\omega) = \begin{cases} -\xi(\omega), & \text{если } \xi(\omega) < 0, \\ 0, & \text{если } \xi(\omega) \geq 0. \end{cases}$$

Определение 1.23. Рассмотрим два ряда

$$\sum_{\omega \in \Omega} \xi_+(\omega)p(\omega) \quad \text{и} \quad \sum_{\omega \in \Omega} \xi_-(\omega)p(\omega).$$

Говорят, что ξ имеет конечное *математическое ожидание*, если сходятся оба эти ряда. Математическое ожидание обозначается $E\xi$ и определяется равенством

$$E\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi_+(\omega)p(\omega) - \sum_{\omega \in \Omega} \xi_-(\omega)p(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)p(\omega).$$

Если первый ряд расходится, а второй сходится, то $E\xi = +\infty$.

Если первый ряд сходится, а второй расходится, то $E\xi = -\infty$.

Если расходятся оба ряда, то $E\xi$ не определено.

Ясно, что $E\xi$ конечно тогда и только тогда, когда $E|\xi|$ конечно.

Замечание 1.24. Иногда вместо математического ожидания используются термины *ожидаемое значение*, *среднее значение*, *среднее*.

Лемма 1.25 (свойства математического ожидания).

1. Если $E\xi_1$ и $E\xi_2$ конечны, то для любых постоянных a и b математическое ожидание $E(a\xi_1 + b\xi_2)$ конечно и $E(a\xi_1 + b\xi_2) = aE\xi_1 + bE\xi_2$.

2. Если $\xi \geq 0$, то $E\xi \geq 0$.

3. Если $\xi \equiv 1$, то $E\xi = 1$.

4. Если $A \leq \xi \leq B$, то $A \leq E\xi \leq B$.

5. Математическое ожидание $E\xi$ конечно тогда и только тогда, когда $\sum_{x \in X} |x| p_\xi(x) < \infty$, где $p_\xi(x) = P(\{\omega : \xi(\omega) = x\})$. В этом случае $E\xi = \sum_{x \in X} x \cdot p_\xi(x)$.

6. Если случайная величина η определена равенством $\eta = g(\xi)$, то $E\eta = \sum_{x \in X} g(x) p_\xi(x)$ и $E\eta$ конечно тогда и только тогда, когда $\sum_{x \in X} |g(x)| \cdot p_\xi(x) < \infty$.

7. Если $|\xi| \leq |\eta|$ и $E|\eta| < \infty$, то и $E|\xi| < \infty$.

Доказательство. Так как $E\xi_1$ и $E\xi_2$ конечны, мы имеем

$$\sum_{\omega \in \Omega} |\xi_1(\omega)| p(\omega) < \infty, \quad \sum_{\omega \in \Omega} |\xi_2(\omega)| p(\omega) < \infty$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} |a\xi_1(\omega) + b\xi_2(\omega)| p(\omega) &\leq \sum_{\omega \in \Omega} (|a||\xi_1(\omega)| + |b||\xi_2(\omega)|) p(\omega) = \\ &= |a| \sum_{\omega \in \Omega} |\xi_1(\omega)| p(\omega) + |b| \sum_{\omega \in \Omega} |\xi_2(\omega)| p(\omega) < \infty. \end{aligned}$$

Используя свойства абсолютно сходящихся рядов, находим, что

$$\sum_{\omega \in \Omega} (a\xi_1(\omega) + b\xi_2(\omega)) p(\omega) = a \sum_{\omega \in \Omega} \xi_1(\omega) p(\omega) + b \sum_{\omega \in \Omega} \xi_2(\omega) p(\omega).$$

Свойства 2 и 3 очевидны. Свойства 1—3 означают, что E представляет собой линейный, неотрицательный, нормированный функционал на векторном пространстве случайных величин. Свойство 4 следует из того, что $\xi - A \geq 0$, $B - \xi \geq 0$, а потому $E(\xi - A) = E\xi - EA \cdot 1 = E\xi - A \geq 0$ и $B - E\xi \geq 0$.

Теперь докажем свойство 6, так как свойство 5 следует из свойства 6 при $g(x) = x$. Пусть $\sum_{x \in X} |g(x)| p_\xi(x) < \infty$. Так как сумма ряда с неотрицательными членами не зависит от порядка суммирования, сумму $\sum_{\omega} |g(\xi(\omega))| p(\omega)$ можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} |g(\xi(\omega))| p(\omega) &= \sum_{x \in X} \sum_{\omega : \xi(\omega) = x} |g(\xi(\omega))| p(\omega) = \\ &= \sum_{x \in X} |g(x)| \sum_{\omega : \xi(\omega) = x} p(\omega) = \sum_{x \in X} |g(x)| p_\xi(x). \end{aligned}$$

Значит, ряд $\sum_{\omega \in \Omega} |g(\xi(\omega))| p(\omega)$ сходится в том и только том случае, когда сходится ряд $\sum_{x \in X} |g(x)| p_\xi(x)$. Если любой из этих рядов

сходится, то ряд $\sum_{\omega \in \Omega} g(\xi(\omega))p(\omega)$ сходится абсолютно и его сумма не зависит от порядка суммирования. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} g(\xi(\omega))p(\omega) &= \sum_{x \in X} \sum_{\omega: \xi(\omega)=x} g(\xi(\omega))p(\omega) = \\ &= \sum_{x \in X} g(x) \sum_{\omega: \xi(\omega)=x} p(\omega) = \sum_{x \in X} g(x)p_{\xi}(x) \end{aligned}$$

и последний ряд также сходится абсолютно.

Свойство 7 непосредственно вытекает из определения математического ожидания. $\square$

Замечание 1.26. Пятое свойство:

$$E\xi = \sum_{x \in X} xp_{\xi}(x), \text{ если ряд в правой части сходится абсолютно,}$$

можно использовать как определение математического ожидания, если ξ принимает счетное число значений, но определено на вероятностном пространстве, которое не обязательно дискретно.

В главе 3 мы определим математическое ожидание для случайной величины общего вида.

Лемма 1.27 (неравенство Чебышёва). *Если $\xi \geq 0$ и $E\xi$ конечно, то для всякого $t > 0$ выполняется неравенство*

$$P(\xi \geq t) \leq \frac{E\xi}{t}.$$

Доказательство. Так как $\xi \geq 0$, имеем

$$\begin{aligned} P\{\xi \geq t\} &= \sum_{\omega: \xi(\omega) \geq t} p(\omega) \leq \sum_{\omega: \xi(\omega) \geq t} \frac{\xi(\omega)}{t} p(\omega) = \\ &= \frac{1}{t} \sum_{\omega: \xi(\omega) \geq t} \xi(\omega) p(\omega) \leq \frac{1}{t} \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) p(\omega) = \frac{1}{t} E\xi. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 1.28 (неравенство Коши—Буняковского). *Если математические ожидания $E\xi_1^2$ и $E\xi_2^2$ конечны, то $E(\xi_1\xi_2)$ также конечно и выполняется неравенство*

$$E|\xi_1\xi_2| \leq \sqrt{E\xi_1^2 \cdot E\xi_2^2}.$$

Доказательство. Так как $|\xi_1\xi_2| \leq (\xi_1^2 + \xi_2^2)/2$, математическое ожидание $E\xi_1\xi_2$ конечно. Для каждого t имеем

$$E(t|\xi_2| + |\xi_1|)^2 = t^2 E\xi_2^2 + 2t E|\xi_1\xi_2| + E\xi_1^2.$$

Поскольку при всех t левая часть этого равенства неотрицательна, то же самое верно и для правой части, откуда следует, что дискриминант неположителен, т. е. $E|\xi_1\xi_2| - (E\xi_1^2E\xi_2^2)^{1/2} \leq 0$. $\square$

Теперь введем другие числовые характеристики случайных величин.

Определение 1.29. Дисперсия случайной величины ξ определяется равенством $\text{Var } \xi = E(\xi - E\xi)^2$ (от слова «variance»), принято также обозначение $D\xi$.

Для существования дисперсии требуется существование математического ожидания $E\xi$. Возможны, конечно, и случаи, когда $E\xi$ конечно, но $\text{Var } \xi = \infty$.

Лемма 1.30 (свойства дисперсии).

1. Дисперсия $\text{Var } \xi$ конечна тогда и только тогда, когда $E\xi^2 < \infty$. В этом случае $\text{Var } \xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$.

2. Если $\text{Var } \xi < \infty$, то $\text{Var}(a\xi + b) = a^2 \text{Var } \xi$ для любых постоянных a и b .

3. Если $A \leq \xi \leq B$, то $\text{Var } \xi \leq \left(\frac{B-A}{2}\right)^2$.

Доказательство свойства 1. Предположим вначале, что $E\xi^2 < \infty$. Тогда $(\xi - E\xi)^2 = \xi^2 - 2(E\xi)\xi + (E\xi)^2$, и из свойства 1 математического ожидания вытекает, что

$$\begin{aligned} \text{Var } \xi &= E\xi^2 - E(2(E\xi)\xi) + E(E\xi)^2 = E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = \\ &= E\xi^2 - (E\xi)^2. \end{aligned}$$

Если $\text{Var } \xi < \infty$, то $\xi^2 = (\xi - E\xi)^2 + 2(E\xi)\xi - (E\xi)^2$, и в силу свойства 1 математического ожидания

$$E\xi^2 = E(\xi - E\xi)^2 + 2(E\xi)^2 - (E\xi)^2 = \text{Var } \xi + (E\xi)^2. \quad \square$$

Доказательство свойства 2. В силу свойства 1 математического ожидания $E(a\xi + b) = aE\xi + b$, поэтому

$$\begin{aligned} \text{Var}(a\xi + b) &= E(a\xi + b - E(a\xi + b))^2 = E(a\xi - aE\xi)^2 = \\ &= Ea^2(\xi - E\xi)^2 = a^2 \text{Var } \xi. \quad \square \end{aligned}$$

Доказательство свойства 3. Пусть $A \leq \xi \leq B$. Из свойства 2 дисперсии следует, что

$$\begin{aligned} \text{Var } \xi &= E(\xi - E\xi)^2 = E\left(\xi - \frac{A+B}{2} - \left(E\xi - \frac{A+B}{2}\right)\right)^2 = \\ &= E\left(\xi - \frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(E\left(\xi - \frac{A+B}{2}\right)\right)^2 \leq E\left(\xi - \frac{A+B}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{B-A}{2}\right)^2. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 1.31 (неравенство Чебышёва для дисперсии). Пусть дисперсия $\text{Var } \xi$ конечна. Тогда

$$P\{\omega: |\xi - E\xi| \geq t\} \leq \frac{\text{Var } \xi}{t^2}.$$

Доказательство. Применим лемму 1.27 к случайной величине $\eta = (\xi - E\xi)^2 \geq 0$:

$$P(|\xi - E\xi| \geq t) = P\{\eta \geq t^2\} \leq \frac{E\eta}{t^2} = \frac{\text{Var } \xi}{t^2}. \quad \square$$

Определение 1.32. Ковариацией случайных величин ξ_1 и ξ_2 называется число $\text{Cov}(\xi_1, \xi_2) = E(\xi_1 - m_1)(\xi_2 - m_2)$, где $m_i = E\xi_i$, $i = 1, 2$.

По лемме 1.28 $\text{Cov}(\xi_1, \xi_2)$ конечна, если конечны $\text{Var } \xi_1$ и $\text{Var } \xi_2$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\xi_1, \xi_2) &= E(\xi_1 - m_1)(\xi_2 - m_2) = \\ &= E(\xi_1\xi_2 - m_1\xi_1 - m_2\xi_2 + m_1m_2) = E\xi_1\xi_2 - m_1m_2 \end{aligned}$$

и

$$\text{Cov}(a_1\xi_1 + b_1, a_2\xi_2 + b_2) = a_1a_2\text{Cov}(\xi_1, \xi_2).$$

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — случайные величины и $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$.

Если $m_i = E\xi_i$, то $E\zeta_n = \sum_{i=1}^n m_i$ и

$$\begin{aligned} \text{Var } \zeta_n &= E\left(\sum_{i=1}^n \xi_i - \sum_{i=1}^n m_i\right)^2 = E\left(\sum_{i=1}^n (\xi_i - m_i)\right)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n E(\xi_i - m_i)^2 + 2 \sum_{i < j} E(\xi_i - m_i)(\xi_j - m_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Var } \xi_i + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(\xi_i, \xi_j). \end{aligned}$$

Определение 1.33. Коэффициентом корреляции случайных величин ξ_1 и ξ_2 с ненулевыми дисперсиями называется число

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{\text{Cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{\text{Var } \xi_1 \text{Var } \xi_2}}.$$

Из свойств дисперсии и ковариации следует, что

$$\rho(a_1\xi_1 + b_1, a_2\xi_2 + b_2) = \rho(\xi_1, \xi_2)$$

для любых постоянных a_1, b_1, a_2, b_2 .

Теорема 1.34. Пусть ξ_1 и ξ_2 — случайные величины с нулевой дисперсией. Тогда абсолютная величина их коэффициента корреляции меньше или равна единице. Если $|\rho(\xi_1, \xi_2)| = 1$ и $\text{Var } \xi_1 \neq 0$, то для некоторых постоянных a и b почти наверное выполняется равенство $\xi_2(\omega) = a\xi_1(\omega) + b$.

Доказательство. Для всякого t имеем

$$\begin{aligned} E(t(\xi_2 - m_2) + (\xi_1 - m_1))^2 &= \\ &= t^2 E(\xi_2 - m_2)^2 + 2t E(\xi_1 - m_1)(\xi_2 - m_2) + E(\xi_1 - m_1)^2 = \\ &= t^2 \text{Var } \xi_2 + 2t \text{Cov}(\xi_1, \xi_2) + \text{Var } \xi_1. \end{aligned}$$

Так как левая часть этого равенства неотрицательна при всех t , это верно и для квадратичного полинома в правой части, откуда следует, что $(\text{Cov}(\xi_1, \xi_2))^2 \leq \text{Var } \xi_1 \text{Var } \xi_2$, т. е. $|\rho(\xi_1, \xi_2)| \leq 1$. Если $|\rho(\xi_1, \xi_2)| = 1$ и $\text{Var } \xi_1 \neq 0$, то найдется $t_0 \neq 0$, для которого $E(t_0(\xi_2 - m_2) + (\xi_1 - m_1))^2 = 0$, т. е. почти наверное

$$t_0(\xi_2(\omega) - m_2) + (\xi_1(\omega) - m_1) = 0.$$

Следовательно, $\xi_2 = m_2 + \frac{m_1}{t_0} - \frac{\xi_1}{t_0}$. Полагая $a = -\frac{1}{t_0}$ и $b = m_2 + \frac{m_1}{t_0}$, получаем второе утверждение теоремы. $\square$

§ 1.3. Вероятность объединения событий

Если $C_1, C_2, \dots, C_n$ — попарно непересекающиеся события, то из определения вероятности следует, что $P\left(\bigcup_{i=1}^n C_i\right) = \sum_{i=1}^n P(C_i)$. Мы выведем формулу для вероятности объединения любых n событий.

Теорема 1.35. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство и $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{F}$. Тогда

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n C_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(C_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(C_{i_1} \cap C_{i_2}) + \sum_{i_1 < i_2 < i_3} P(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap C_{i_3}) - \\ &\quad - \sum_{i_1 < i_2 < i_3 < i_4} P(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap C_{i_3} \cap C_{i_4}) + \dots \end{aligned}$$

Доказательство. Сначала предположим, что пространство Ω дискретно. Рассмотрим дополнение

$$\Omega \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n C_i\right) = \bigcap_{i=1}^n (\Omega \setminus C_i).$$

Для каждого $C \in \mathcal{F}$ положим

$$\chi_C(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in C, \\ 0, & \text{если } \omega \notin C, \end{cases}$$

т. е. χ_C — индикатор множества C . Легко видеть, что $\chi_{\Omega \setminus C}(\omega) = 1 - \chi_C(\omega)$ и

$$\chi_{\bigcap_{i=1}^n (\Omega \setminus C_i)}(\omega) = \prod_{i=1}^n \chi_{\Omega \setminus C_i}(\omega) = \prod_{i=1}^n (1 - \chi_{C_i}(\omega)).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n C_i\right) &= P\left(\bigcap_{i=1}^n (\Omega \setminus C_i)\right) = \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \chi_{\bigcap_{i=1}^n (\Omega \setminus C_i)}(\omega) p(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} \prod_{i=1}^n (1 - \chi_{C_i}(\omega)) p(\{\omega\}) = \\ &= 1 - \sum_{i=1}^n \sum_{\omega \in \Omega} \chi_{C_i}(\omega) p(\{\omega\}) + \sum_{i_1 < i_2} \sum_{\omega \in \Omega} \chi_{C_{i_1}}(\omega) \cdot \chi_{C_{i_2}}(\omega) p(\{\omega\}) - \dots = \\ &= 1 - \sum_{i=1}^n P(C_i) + \sum_{i_1 < i_2} P(C_{i_1} \cap C_{i_2}) - \dots, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство теоремы для случая дискретного Ω . $\square$

В общем случае, когда Ω не обязательно дискретно, мы можем заменить суммы $\sum_{\omega \in \Omega}$ интегралами по пространству Ω , отвечающими мере P . Это, однако, требует использования понятия интеграла Лебега, которое будет введено в гл. 3.

Теперь мы применим теорему 1.35 для решения одной интересной задачи. Наши рассуждения не будут абсолютно строгими, они нацелены на развитие интуиции у читателя.

Пусть x_1 и x_2 — два целых числа, выбранных случайным образом и независимо друг от друга из множества $\{1, \dots, n\}$ в соответствии с равномерным распределением. Это означает, что пространство Ω состоит из пар $\omega = (x_1, x_2)$, где $1 \leq x_1 \leq n$, $1 \leq x_2 \leq n$. Оно содержит n^2 элементов (элементарных исходов), и вероятность каждого элементарного исхода равна $p^n(\omega) = \frac{1}{n^2}$. Обозначим через P^n соответствующую вероятностную меру. Пусть A^n — событие, состоящее в том, что x_1 и x_2 взаимно просты:

$$A^n = \{(x_1, x_2) \in \Omega_n : x_1 \text{ и } x_2 \text{ взаимно просты}\}.$$

Мы найдем предел $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(A^n)$. В приводимых ниже формулах q обозначает простое число, $q > 1$. Пусть C_q^n — событие, состоящее в том, что x_1 и x_2 делятся на q . Тогда

$$P^n(A^n) = 1 - P^n\left(\bigcup_{q \leq n} C_q^n\right),$$

из теоремы 1.35 получаем

$$\begin{aligned} P^n\left(\bigcup_{q \leq n} C_q^n\right) &= \\ &= \sum_{q \leq n} P^n(C_q^n) - \sum_{q_1 < q_2 \leq n} P^n(C_{q_1}^n \cap C_{q_2}^n) + \sum_{q_1 < q_2 < q_3 \leq n} P^n(C_{q_1}^n \cap C_{q_2}^n \cap C_{q_3}^n) - \dots \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$P^n(C_q^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q^2}, \quad P^n(C_{q_1}^n \cap C_{q_2}^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_1^2 q_2^2} \quad \text{и т. д.}$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{q \leq n} C_q^n\right) = \sum_q \frac{1}{q^2} - \sum_{q_1 < q_2} \frac{1}{q_1^2 q_2^2} + \sum_{q_1 < q_2 < q_3} \frac{1}{q_1^2 q_2^2 q_3^2} - \dots$$

Так как число членов в правой части бесконечно, эта формула требует более строгого обоснования, которое мы здесь не проводим. Теперь

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(A^n) &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P^n\left(\bigcup_{q \leq n} C_q^n\right) = \\ &= 1 - \sum_q \frac{1}{q^2} + \sum_{q_1 < q_2} \frac{1}{q_1^2 q_2^2} - \sum_{q_1 < q_2 < q_3} \frac{1}{q_1^2 q_2^2 q_3^2} - \dots = \prod_q \left(1 - \frac{1}{q^2}\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(A^n) = \frac{1}{\prod_q \left(1 - \frac{1}{q^2}\right)} = \prod_q \frac{1}{1 - \frac{1}{q^2}} = \prod_q \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{q^{2m}} = \sum \frac{1}{q_1^{2m_1}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{q_s^{2m_s}},$$

где последняя сумма берется по всем $s \geq 0$, всем конечным словам $(q_1, \dots, q_s)$ с простыми $q_1 < q_2 < \dots < q_s$ и всем конечным словам $(m_1, \dots, m_s)$, $m_i \geq 0$. Так как каждое натуральное число можно единственным образом записать в виде $x = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_s^{m_s}$, последняя сумма равна $\sum_{x \geq 1} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(A^n) = \frac{6}{\pi^2}.$$

§1.4. Эквивалентные определения σ -аддитивности, борелевских σ -алгебр и измеримости

Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство.

Теорема 1.36. *Предположим, что функция P на $\mathcal{F}$ обладает свойствами вероятностной меры, но σ -аддитивность заменена на конечную аддитивность, так что*

- 1) $P(C) \geq 0$ для всякого $C \in \mathcal{F}$;
- 2) $P(\Omega) = 1$;
- 3) если $C_i \in \mathcal{F}$, $1 \leq i \leq n$, и $C_i \cap C_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n C_i\right) = \sum_{i=1}^n P(C_i).$$

Тогда следующие четыре утверждения эквивалентны:

- 1) P — σ -аддитивная мера (и, значит, — вероятностная мера);
- 2) для всякой последовательности событий $C_i \in \mathcal{F}$, $C_i \subseteq C_{i+1}$,

выполняется равенство

$$P\left(\bigcup_i C_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(C_i);$$

- 3) для всякой последовательности событий $C_i \in \mathcal{F}$, $C_i \supseteq C_{i+1}$, выполняется равенство

$$P\left(\bigcap_i C_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(C_i);$$

- 4) для всякой последовательности событий $C_i \in \mathcal{F}$, $C_i \supseteq C_{i+1}$, $\bigcap_i C_i = \emptyset$, справедливо соотношение

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P(C_i) = 0.$$

Доказательство. Для всех пар утверждений эквивалентность доказывается одинаково. Докажем, например, что утверждение 1 эквивалентно утверждению 4. Пусть $C_i \in \mathcal{F}$, $C_i \supseteq C_{i+1}$, $\bigcap_i C_i = \emptyset$. Рассмотрим события $B_i = C_i \setminus C_{i+1}$. Тогда $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $C_k = \bigcup_{i \geq k} B_i$. Из σ -аддитивности меры P следует, что $P(C_1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$. Таким образом, остаток ряда $\sum_{i=k}^{\infty} P(B_i) = P(C_k)$ стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, а это и есть свойство 4.

Обратно, докажем, что из свойства 4 вытекает σ -аддитивность. Предположим, что имеется последовательность событий C_i , $C_i \cap C_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Пусть $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Тогда

$$C = \left(\bigcup_{i=1}^n C_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} C_i \right)$$

для любого n , и в силу конечной аддитивности

$$P(C) = \sum_{i=1}^n P(C_i) + P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} C_i\right).$$

Последовательность событий $B_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} C_i$ убывает, и $\bigcap_n B_n = \emptyset$. Следовательно, $P(B_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и $P(C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i)$. $\square$

Теперь мы рассмотрим важнейшие примеры σ -алгебр, которые встречаются в теории вероятностей.

Вначале дадим следующее общее определение.

Определение 1.37. Пусть $\mathcal{A} = \{A\}$ — произвольная совокупность подмножеств пространства Ω . Пересечение всех σ -алгебр, содержащих все элементы совокупности $\mathcal{A}$, называется σ -алгеброй, порожденной $\mathcal{A}$, или минимальной σ -алгеброй, содержащей $\mathcal{A}$. Эту σ -алгебру обозначают $\sigma(\mathcal{A})$.

Другими словами,

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{C : C \in \mathcal{F} \text{ для каждой такой } \sigma\text{-алгебры } \mathcal{F}, \text{ что } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}\}. \quad (1.1)$$

Мы должны сделать три замечания, чтобы придать смысл этому определению. Во-первых, имеется по крайней мере одна σ -алгебра, которая содержит $\mathcal{A}$, а именно σ -алгебра всех подмножеств пространства Ω . Во-вторых, ясно, что пересечение любой совокупности σ -алгебр есть снова σ -алгебра. Следовательно, множество $\sigma(\mathcal{A})$ в формуле (1.1) определено корректно и является σ -алгеброй. Наконец, очевидно, что всякая σ -алгебра $\mathcal{F}$, которая содержит $\mathcal{A}$, должна также содержать $\sigma(\mathcal{A})$, иначе можно было бы рассмотреть σ -алгебру $\sigma(\mathcal{A}) \cap \mathcal{F}$, которая бы строго содержалась в $\sigma(\mathcal{A})$. В этом смысле $\sigma(\mathcal{A})$ — наименьшая σ -алгебра, содержащая все элементы совокупности $\mathcal{A}$.

Теперь предположим, что $\Omega = \mathbb{R}$. Рассмотрим следующие семейства подмножеств:

- 1) $\mathcal{A}_1$ — совокупность интервалов (a, b) ;
- 2) $\mathcal{A}_2$ — совокупность полуинтервалов $[a, b)$;
- 3) $\mathcal{A}_3$ — совокупность полуинтервалов $(a, b]$;
- 4) $\mathcal{A}_4$ — совокупность замкнутых интервалов (отрезков) $[a, b]$;
- 5) $\mathcal{A}_5$ — совокупность полубесконечных интервалов $(-\infty, a)$;
- 6) $\mathcal{A}_6$ — совокупность полубесконечных замкнутых интервалов $(-\infty, a]$;
- 7) $\mathcal{A}_7$ — совокупность полубесконечных интервалов (a, ∞) ;
- 8) $\mathcal{A}_8$ — совокупность полубесконечных замкнутых интервалов $[a, \infty)$;
- 9) $\mathcal{A}_9$ — совокупность открытых подмножеств множества $\mathbb{R}$;
- 10) $\mathcal{A}_{10}$ — совокупность замкнутых подмножеств множества $\mathbb{R}$.

Теорема 1.38. *Наименьшие σ -алгебры, содержащие перечисленные классы множеств, совпадают:*

$$\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2) = \dots = \sigma(\mathcal{A}_9) = \sigma(\mathcal{A}_{10}).$$

Эта σ -алгебра называется борелевской σ -алгеброй в $\mathbb{R}$ или σ -алгеброй борелевских подмножеств $\mathbb{R}$ и обычно обозначается $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ или просто $\mathcal{B}$.

Доказательство. Докажем, что $\sigma(\mathcal{A}_2) = \sigma(\mathcal{A}_1)$. Для любых $a < b$ можно найти последовательность $a_n \downarrow a$. Тогда $\bigcup_n [a_n, b) = (a, b)$ и, следовательно, $(a, b) \in \sigma(\mathcal{A}_2)$. Обратно, для любых $a < b$ мы можем найти $a_n \uparrow a$. Тогда $\bigcap_n (a_n, b) = [a, b)$ и, следовательно, $[a, b) \in \sigma(\mathcal{A}_1)$. Отсюда вытекает, что $\sigma(\mathcal{A}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$.

Совпадение σ -алгебр $\sigma(\mathcal{A}_1)$, $\sigma(\mathcal{A}_2)$, ..., $\sigma(\mathcal{A}_7)$ и $\sigma(\mathcal{A}_8)$ доказывается очень похожим способом. Равенство $\sigma(\mathcal{A}_9) = \sigma(\mathcal{A}_{10})$ вытекает из того, что каждое замкнутое множество является дополнением к открытому. Включение $\sigma(\mathcal{A}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_9)$ справедливо потому, что всякий интервал (a, b) есть открытое множество. Чтобы показать, что $\sigma(\mathcal{A}_9) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$, достаточно заметить, что всякое открытое множество можно представить как счетное объединение открытых интервалов. $\square$

Предположим, что $\Omega = X$ — метрическое пространство.

Определение 1.39. *Борелевской σ -алгеброй пространства X называется σ -алгебра $\sigma(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — семейство открытых подмножеств пространства X .*

В этом определении в качестве $\mathcal{A}$ можно было бы также взять совокупность всех замкнутых множеств, так как всякое открытое

множество — дополнение к замкнутому множеству. Если X — сепарабельное пространство, то любое открытое множество может быть представлено как счетное объединение открытых шаров.

Поэтому для сепарабельного пространства мы могли бы определить борелевскую σ -алгебру как $\sigma(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — семейство всех открытых шаров.

Теперь определим произведение измеримых пространств

$$(\Omega_1, \mathcal{F}_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{F}_n).$$

Множество $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ состоит из последовательностей $(\omega_1, \dots, \omega_n)$, где $\omega_i \in \Omega_i$ при $1 \leq i \leq n$; σ -алгебра $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \dots \times \mathcal{F}_n$ определяется как минимальная σ -алгебра, содержащая все множества вида $A_1 \times \dots \times A_n$, где $A_i \in \mathcal{F}_i$, $1 \leq i \leq n$. Положим

$$(\Omega_1, \mathcal{F}_1) \times \dots \times (\Omega_n, \mathcal{F}_n) = (\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n, \mathcal{F}_1 \times \dots \times \mathcal{F}_n).$$

Если $X_1, \dots, X_n$ — метрические пространства, то $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ также метрическое пространство, и можно взять в качестве метрики на нем произведение метрик и рассмотреть борелевскую σ -алгебру $\mathcal{B}(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n)$. Легко видеть, что для сепарабельных метрических пространств эта σ -алгебра совпадает с произведением σ -алгебр $\mathcal{B}(X_1) \times \mathcal{B}(X_2) \times \dots \times \mathcal{B}(X_n)$ (см. задачу 12).

Определение 1.40. Пусть имеются два измеримых пространства $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$. Функция $f: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ называется *измеримой*, если $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ для всякого $A \in \tilde{\mathcal{F}}$.

В случае, когда второе пространство есть $\mathbb{R}$ с σ -алгеброй борелевских множеств $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, это определение согласовано с предыдущим определением измеримости. Действительно, совокупность множеств $A \in \tilde{\mathcal{F}}$, для которых $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, образует σ -алгебру. Если эта σ -алгебра содержит все полуинтервалы $[a, b)$, то в силу теоремы 1.38 она содержит всю борелевскую σ -алгебру.

Пусть $g(x_1, \dots, x_n)$ — функция n действительных переменных, измеримая относительно борелевской σ -алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (см. определение 1.39).

Лемма 1.41. Для любых измеримых функций $f_1(\omega), \dots, f_n(\omega)$ функция $g(f_1(\omega), \dots, f_n(\omega))$ также измерима.

Доказательство. Достаточно показать, что прообраз каждого борелевского множества из $\mathbb{R}^n$ при отображении

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(\omega) = (f_1(\omega), \dots, f_n(\omega)),$$

измерим, т. е.

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F} \quad (1.2)$$

для каждого $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Если $A \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество вида $A = A_1 \times \dots \times A_n$, где A_i , $i = 1, \dots, n$, — борелевские множества, то множество $f^{-1}(A) = \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(A_i)$ измеримо. Совокупность множеств, для которых выполняется условие (1.2), образует σ -алгебру, поэтому это условие выполняется для всех множеств из наименьшей σ -алгебры, содержащей все «прямоугольники», которая, очевидно, является борелевской σ -алгеброй пространства $\mathbb{R}^n$. $\square$

Применяя лемму 1.41 к функциям $g_1(x_1, \dots, x_p) = a_1x_1 + \dots + a_px_p$, $g_2(x_1, \dots, x_p) = x_1 \cdot \dots \cdot x_p$ и $g_3(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$, мы сразу получаем следующее.

Лемма 1.42. Если $f_1, \dots, f_p$ — измеримые функции, то их линейная комбинация $g = a_1g_1 + \dots + a_pg_p$ и произведение $g = f_1 \cdot \dots \cdot f_p$ также измеримы. Отношение двух измеримых функций, вторая из которых не обращается в нуль, также измеримо.

§ 1.5. Функции распределения и плотности

Определение 1.43. Функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ , определенной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, равна вероятности того, что ξ не превосходит x , т. е.

$$F_\xi(x) = P(\{\omega : \xi(\omega) \leq x\}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Теорема 1.44. Если $F_\xi(x)$ — функция распределения случайной величины ξ , то

- 1) $F_\xi(x)$ — неубывающая функция, т. е. $F_\xi(x) \leq F_\xi(y)$, если $x \leq y$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F_\xi(x) = 1$;
- 3) функция $F_\xi(x)$ непрерывна справа при каждом x , т. е.

$$\lim_{y \searrow x} F_\xi(y) = F_\xi(x).$$

Доказательство. Первое свойство следует из того, что при $x \leq y$ событие $\{\omega : \xi(\omega) \leq x\}$ содержится в событии $\{\omega : \xi(\omega) \leq y\}$.

Чтобы доказать второе свойство, заметим, что пересечение вложенных событий $\{\omega : \xi(\omega) \leq -n\}$, $n \geq 0$, пусто, и по теореме 1.36

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\xi(-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega : \xi(\omega) \leq -n\}) = 0,$$

из чего в силу монотонности следует, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0$. Аналогично доказывается, что $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{\xi}(x) = 1$.

Чтобы доказать последнее свойство, заметим, что пересечение вложенных событий $\left\{ \omega : x < \xi(\omega) \leq x + \frac{1}{n} \right\}$, $n \geq 0$, пусто, и в силу теоремы 1.36

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(F_{\xi} \left(x + \frac{1}{n} \right) - F_{\xi}(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left\{ \omega : x < \xi(\omega) \leq x + \frac{1}{n} \right\} \right) = 0.$$

Из монотонности функции $F_{\xi}(x)$ вытекает, что $\lim_{y \searrow x} F_{\xi}(y) = F_{\xi}(x)$. $\square$

Теперь мы можем игнорировать тот факт, что $F_{\xi}(x)$ возникает как функция распределения конкретной случайной величины ξ , и дадим следующее определение.

Определение 1.45. Всякая функция $F(x)$, определенная на действительной прямой и удовлетворяющая условиям 1–3, перечисленным в теореме 1.44, называется *функцией распределения*.

Ниже мы увидим, что всякая функция распределения определяет вероятностную меру на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ и в самом деле является функцией распределения случайной величины $\xi(x) = x$ относительно этой меры.

В некоторых случаях (но не всегда!) на действительной прямой существует такая неотрицательная интегрируемая функция $p(t)$, что для всех x выполняется равенство

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt.$$

В таком случае p называется *плотностью распределения вероятностей* или просто *плотностью*, отвечающей функции F . Если $F = F_{\xi}$ — функция распределения случайной величины ξ , то $p = p_{\xi}$ называется *плотностью распределения* случайной величины ξ . В то время как правая часть последнего равенства понимается как интеграл Лебега (определенный в гл. 3), для непрерывной функции $p(t)$ она равна обычному интегралу Римана.

Заметим, что любая плотность удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = 1.$$

И наоборот, любая неотрицательная интегрируемая функция, удовлетворяющая этому условию, определяет посредством формулы

$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$ функцию распределения и, значит, является плотностью распределения вероятностей.

Если P — распределение вероятностей на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ и p — такая плотность вероятности, что для всех x выполняется равенство

$$P((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^x p(t) dt,$$

то говорят, что p является плотностью распределения P . Взаимосвязь между функциями распределения и распределениями вероятности будет обсуждаться в § 3.2.

Примеры плотностей распределения вероятностей

1. Функция $p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$, $-\infty < u < \infty$, называется нормальной или гауссовской плотностью с параметрами 0 и 1; соответствующая функция распределения имеет вид $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$.

2. Функция $p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} e^{-(u-a)^2/(2d)}$, $-\infty < u < \infty$, называется нормальной или гауссовской плотностью с параметрами a и d . Распределение с такой плотностью обозначается через $N(a, d)$.

3. Равномерная плотность на интервале (a, b) :

$$p(u) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & u \in (a, b), \\ 0, & u \notin (a, b). \end{cases}$$

4. Функция

$$p(u) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda u}, & u \geq 0, \\ 0, & u < 0, \end{cases}$$

называется экспоненциальной (или показательной) плотностью с параметром λ .

5. Функция $p(u) = \frac{1}{\pi(1+u^2)}$, $-\infty < u < \infty$, называется плотностью Коши или плотностью распределения Коши.

Будем говорить, что ξ — случайный вектор, если $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, где ξ_i , $1 \leq i \leq n$, — случайные величины, определенные на одном и том же вероятностном пространстве.

Определение 1.46. Функция распределения $F_\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, заданного на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, определяется равенством

$$F_\xi(x_1, \dots, x_n) = P(\{\omega: \xi_1(\omega) \leq x_1, \dots, \xi_n(\omega) \leq x_n\}).$$

Для формулировки многомерного обобщения теоремы 1.44 нам понадобятся следующие обозначения. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ — векторы в $\mathbb{R}^n$. Будем писать $x \leq y$, если $x_i \leq y_i$ при $1 \leq i \leq n$. По каждому вектору $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ с $\sigma_i \in \{0, 1\}$ при $i = 1, \dots, n$ можно определить новый вектор $z = \sigma(x, y)$ с компонентами

$$z_i = \begin{cases} y_i, & \text{если } \sigma_i = 0, \\ x_i, & \text{если } \sigma_i = 1. \end{cases}$$

Пусть $|\sigma| = \sigma_1 + \dots + \sigma_n$ — число компонент вектора σ , которые равны единице.

Теорема 1.47. Пусть F_ξ — функция распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Тогда

1) если $x, y \in \mathbb{R}^n$ таковы, что $x \leq y$, то

$$\sum_{\sigma \in \{0,1\}^n} (-1)^{|\sigma|} F_\xi(\sigma(x, y)) \geq 0;$$

2) $\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0$ для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$; $\lim_{x \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} F_\xi(x) = 1$;

3) $F_\xi(x)$ непрерывна справа при всех x , т. е.

$$\lim_{y \searrow x} F_\xi(y) = F_\xi(x).$$

Эту теорему можно доказать так же, как теорему 1.44. Заметим, что первое свойство выражает тот факт, что $P(x < \xi \leq y) \geq 0$. Из свойств 1—3 легко вывести, что F_ξ принимает значения в $[0, 1]$ и не убывает, т. е. $F_\xi(x) \leq F_\xi(y)$, если $x \leq y$.

Определение 1.48. Всякая функция F , определенная на $\mathbb{R}^n$ и обладающая свойствами 1—3, перечисленными в теореме 1.47, называется функцией распределения.

§ 1.6. Задачи

1. Некий человек родился 1 марта, его отец — 2 марта, а один из его дедушек — 3 марта. Как бы вы оценили число таких людей в США?

2. Предположим, что n одинаковых шаров случайным образом размещены по m ящикам. Постройте соответствующее пространство элементарных исходов. В предположении, что вероятности попадания каждого шара в случайно выбранный ящик одинаковы, найдите вероятность того, что первый ящик пуст.

3. В ящике находятся 90 хороших деталей и 10 деталей с дефектом. Найдите вероятность того, что среди выбранных 10 деталей не будет деталей с дефектом.

4. Пусть ξ — такая случайная величина, что $E|\xi|^m \leq AC^m$ для некоторых постоянных A и C и всех целых $m \geq 0$. Докажите, что $P\{|\xi| > C\} = 0$.

5. Предположим, что n писем, адресованных n разным людям, перемешаны и разложены по n конвертам с надписанными адресами. Найдите вероятность того, что по крайней мере одно письмо попадет в нужный конверт. Найдите предел этой вероятности при $n \rightarrow \infty$.

6. При целых n и r найдите число решений уравнения

$$x_1 + \dots + x_r = n,$$

где x_i — неотрицательное целое число. Предполагая равномерность распределения на пространстве решений, найдите $P\{x_1 = a\}$ и предел этой вероятности при $r \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, $n/r \rightarrow \rho > 0$.

7. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей распределение Пуассона с параметром λ .

8. Начертите график функции распределения случайной величины, принимающей значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$.

9. Докажите, что если $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ , то $P(\xi = x) = F(x) - \lim_{\delta \downarrow 0} F(x - \delta)$.

10. Случайная величина ξ имеет плотность распределения p . Найдите плотность распределения случайной величины $\eta = a\xi + b$ для $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

11. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на $[0, 2\pi]$. Найдите плотность распределения случайной величины $\eta = \sin \xi$.

12. Пусть $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ — сепарабельные метрические пространства. Определим $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ как их прямое произве-

дение с метрикой

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + \dots + d_n^2(x_n, y_n)}.$$

Докажите, что $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X_1) \times \dots \times \mathcal{B}(X_n)$.

13. Среди целых чисел от 1 до 1000 случайным образом выбирается одно (с равномерным распределением). Какова вероятность выбрать целую степень (выше первой) целого числа?

14. Пусть $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ — такая последовательность событий в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(C_{n+1} \setminus C_n) < \infty.$$

Докажите, что

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k\right) = 0.$$

15. Пусть ξ — случайная величина с непрерывной функцией распределения F . Найдите функцию распределения случайной величины $F(\xi)$.

Предметный указатель

- σ -алгебра борелевская 28
- минимальная 27
- порожденная семейством множеств 27
- событий, определенных до момента остановки 218
- алгебра множеств 12
- белый шум 289
- броуновский мост 314
- броуновское движение 291
 - — d -мерное 293
 - — изменение масштаба и симметрия 309
 - — инвариантность относительно вращений и отражений 310
 - — марковское свойство 321
 - — обращение времени 310
 - — относительно фильтрации 293, 315
 - — распределение максимума 329
 - — строго марковское свойство 327
 - — сходимость квадратических вариаций 310
- вариация над разбиением 57
- вектор сноса 359
- вероятность объединения событий 23
 - события 15
- винеровская мера 300
- винеровский процесс 291
- гауссовский процесс 205
 - случайный вектор 150
- гиббсовское случайное поле 393
- гильбертово пространство, порожденное случайным процессом 244
- гомогенизация 386
- дисперсия 21
- европейский опцион покупки 364
- задача Дирихле 367, 373
 - — существование и единственность решения 373
 - Коши, существование и единственность решения 378
 - о разорении игрока 115
- закон арксинуса 114
 - больших чисел для независимых однородных испытаний с конечным числом исходов 39
 - — — для цепи Маркова 92
 - — — стационарного в широком смысле случайного процесса 245, 264
 - нуля-единицы Блюментала 324
 - — для последовательности независимых случайных величин 277
 - повторного логарифма 312
- измеримая полугруппа сохраняющих меру преобразований 278
 - — — — — перемешивающая 279
- измеримое множество 14
 - пространство 14
- интеграл Ито 342

- Лебега 51
- по ортогональной случайной мере 252
- интегрирование по частям для интеграла Ито 357
- инфинитезимальная матрица 235
- инфинитезимальный генератор 372
- испытания Бернулли 42
- квадратическая вариация
 - квадратично интегрируемого мартингала 334
- — локального мартингала 348
- ковариация случайных величин 22, 55
- стационарного в широком смысле случайного процесса 243
- конечномерный цилиндр 199
- коэффициент корреляции 22, 55
- кросс-вариация квадратично интегрируемых мартингалов 335
- лемма Бореля—Кантелли вторая 124
- — первая 123
- Фату 67
- локализация 348
- локальная предельная теорема 161
- локальный мартингал 348
- мажорируемая сходимость
 - условных математических ожиданий 211
- марковская переходная функция 97
- марковские семейства решений
 - стохастических ДУ 382
- марковский переходный оператор 384
- процесс 316
- — с конечным пространством состояний 234
- марковское свойство решений
 - стохастических ДУ 382
 - семейство 316
- мартингал 220
- замыкаемый справа 227
- квадратично интегрируемый 333
- математическое ожидание
 - случайной величины 18, 51, 55
- — стационарного в широком смысле случайного процесса 243
- матрица 84
- диффузии 359
- ковариаций 151
- переходных вероятностей 87
- стохастическая эргодическая 89
- мера σ -конечная 59
- абсолютно непрерывная 60
- вероятностная 15
- Винера (винеровская) 300
- дискретная 60
- знакопеременная 69
- инвариантная для марковского семейства 384
- конечная 15
- Лебега 58
- непрерывная сингулярная 60
- стационарная (инвариантная) для марковской переходной функции 98
- мера-произведение 67
- метод Монте-Карло 72
- множество μ -пренебрежимое 64
- измеримое 14
- невозвратное 100
- модификация случайного процесса 201
- момент остановки 217
- начальное распределение 316
- независимые σ -алгебры 78
- процессы 201
- случайные величины 78
- события 78
- непрерывные процессы 225

- справа процессы 225
- неравенство Гёльдера 71
- Гронуолла 361
- Дуба 224, 226
- Йенсена 213
- Коши—Буняковского 20, 71
- Куниты—Ватанабе 345
- Пайерлса 399
- Чебышёва 20
- неразличимые процессы 201
- обобщенная функция
 - неотрицательно определенная 289
- обобщенный случайный процесс 283, 284
 - — — гауссовский 287
 - — — стационарный в узком смысле 284
 - — — — в широком смысле 285
- однородная последовательность независимых случайных испытаний 205
- ожидаемое значение 18
- опцион 364
- ортогональная случайная мера 252
- перемешивание 274, 275
- переходная вероятность 97
 - функция для марковского семейства 317
- плотность гауссовская 32
 - Коши 32
 - нормальная 32
 - равномерная 32
 - распределения 31
 - — — показательная 32
 - семейства вероятностных мер 136
- полная вариации функции 58
- полуалгебра 62
- пополнение пространства с мерой 64
 - пополненная фильтрация 323
 - последний элемент мартингала 227
 - почти всюду 15
 - почти наверное 16
 - предельная теорема Пуассона 47
 - пренебрежимое множество 225
 - преобразование сдвига 269, 279
 - сохраняющее меру 268
 - — — перемешивающее 274
 - принцип отражения 110
 - прогрессивно измеримый процесс 324
 - произведение σ -алгебр 67
 - простой случайный процесс 340
 - пространство L^p 71
 - вероятностное 15
 - дискретное 14
 - обобщенных функций 282
 - основных функций 282
 - состояний случайного процесса 199
 - — цепи Маркова 86
 - элементарных исходов 11
 - процесс Бесселя 312
 - Орнштейна—Уленбека 365, 385
 - Пуассона 206
 - равномерно эллиптический оператор 373
 - равнотепенная непрерывность 297
 - разложение Дуба 221
 - Дуба—Мейера 225
 - Хана 70
 - распределение вероятностей 15
 - гауссовское 32
 - геометрическое 17
 - индуцированное случайной величиной 17
 - Пуассона 17
 - равномерное 17
 - стационарное для матрицы переходных вероятностей 89

- устойчивое 179
- распределения конечномерные 200
- реализация случайного процесса 200
- регулярная условная вероятность 214
- регулярность случайного процесса 275
- семимартингал непрерывный 351
- сильное решение стохастического ДУ 359
- — существование и единственность 361
- система Дынкина 79
- случайная величина 16
- — инвариантная (mod 0) 273
- спектральная мера 252
- случайное блуждание 42
- — возвратное 106
- — невозвратное 106
- — простое 42
- — — симметричное 46
- поле 199
- случайный процесс 199
- — гауссовский 205
- — диффузионный 356, 360
- — измеримый 200
- — линейно недетерминированный 255
- — линейно регулярный 255, 264
- — непрерывный 225
- — перемешивающий 280
- — прогрессивно измеримый 324
- — простой 340
- — регулярный 275, 280
- — согласованный с фильтрацией 219
- — стационарный в узком смысле 267
- — стационарный в широком смысле 243
- — эргодический 279
- событие 14
- инвариантное (mod 0) 273
- события независимые 77
- сохраняющее меру преобразование 268
- спектральная мера стационарного в широком смысле случайного процесса 250, 252
- среднее 18
- значение 18
- стационарное распределение для полугруппы марковских переходных матриц 235
- стохастический интеграл 342, 344
- — для простого процесса 342
- — по отношению к непрерывному локальному мартингалу 349
- стохастическое дифференциальное уравнение 358
- — — сильное решение 359
- строго марковский процесс 325
- марковское свойство 324
- — семейство 325
- субмартингал 220
- супермартингал 220
- сходимость по вероятности (по мере) 64
- по распределению 131
- почти всюду (почти наверное) 65
- равномерная 64
- слабая 131
- счетная аддитивность (σ -аддитивность) 15
- теорема о трех рядах 127
- Арцела—Асколи 297
- Б. Леви о монотонной сходимости 67
- Бохнера 248

- Вейерштрасса 40
- Гливенко—Кантелли 43
- Донскера 301
- Дуба о пересечении σ -подалгебр 276
- — о сходимости замыкаемого справа мартингала 228
- — о сходимости L^1 -ограниченного мартингала 230
- Егорова 65
- Каратеодори 63
- Колмогорова о гёльдеровской модификации 305
- — о согласованных конечномерных распределениях 202
- — об усиленном законе больших чисел вторая 127
- — — первая 126
- Колмогорова—Винера 258
- Линдеберга—Феллера 160
- Макмиллана 40
- максимальная эргодическая 271
- Муавра—Лапласа 44
- о мажорируемой сходимости условных математических ожиданий 211
- о свободном выборе 222, 226
- Пойа о случайных блужданиях 108
- Прохорова 136
- Радона—Никодима 69
- Фубини 68
- Хинчина о законе больших чисел 123
- эргодическая Биркгофа—Хинчина 270
- — фон Неймана 246, 263, 278
- тождество Вальда 357
- точка регулярная 368
- сингулярная 368
- траектории случайного блуждания 42
- траектория случайного процесса 200
- уравнение Колмогорова обратное 381
- — прямое 381
- урновая схема Пойа 229
- усиленный закон больших чисел для броуновского движения 309
- — — для цепей Маркова 101
- условие Дёблина 100
- — сильное 99
- Линдеберга 156
- Ляпунова 159
- согласованности 202
- условная вероятность 76, 210, 211
- условное математическое ожидание 210
- неравенство Йенсена 213
- фильтрация 217
- непрерывная справа 225
- удовлетворяющая обычным условиям 225
- формула Байеса 77
- Блэка и Шоулса 362
- Ито 351, 356
- Фейнмана—Каца 378
- фундаментальное решение 379
- функция измеримая 14, 29
- интегрируемая 53
- неотрицательно определенная 247
- обобщенная 282
- простая 50
- распределения 31
- — случайного вектора 33
- — случайной величины 30
- характеристическая функция мер 142

- — случайной величины 142
- характеристический функционал случайного процесса 313
- центральная предельная теорема 156
- цепь Маркова 205, 268
- — однородная 87
- цилиндр 36
- конечномерный 36
- — элементарный 36
- цилиндрическое множество 199
- подмножество 294
- эквивалентность случайных процессов 333
- элементарный исход 11
- энергия взаимодействия 394
- энтропия меры 39
- цепи Маркова 94
- эргодическая компонента 100
- теорема Биркгофа—Хинчина 278
- — для марковских процессов 235
- — для цепей Маркова 89
- — фон Неймана 246, 263
- эргодичность полугруппы сохраняющих меру преобразований 279
- сохраняющего меру преобразования 273

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (499) 241-72-85; biblio.mcsme.ru
Книги в электронном виде: <http://www.litres.ru/mcnmo/>
<http://globalf5.com/search/founded/type/book/area/publisher/stype/extended/q/мцнмо>

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмоскowie

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i@bk.ru, k_i@petroglyph.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг налоговым платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru